बीजगणित

अनुवादक

डा० मोहन लाल

(गणित)

डा० कृष्ण लाल

(संस्कृत)

डा० जगदीश कुमार

(हिन्दी)

डा० महेन्द्र

(हिन्दी)

(पी० जी० डी० ए० वी० कालेज, नई दिल्ली)

बीजगणित

उच्चतर माध्यमिक कक्षाओं के लिए पाठ्यपुस्तक

भाग 1

शान्ति नारायण
मोहन लाल

राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद

श्री शान्ति नारायण ग्रौर श्री मोहन लाल ने जिस परिश्रम ग्रौर शीघ्रता से परिपक्व ग्रनुभव ग्रौर दृढ़ निश्चय के साथ इस पुस्तक का सृजन किया है, राष्ट्रीय परिषद् उसके लिए ग्राभार प्रदर्शन करती है। हम ग्रन्य सैकड़ों पाठकों के साथ उस दूसरे भाग की प्रतीक्षा कर रहे हैं, जिसकी पहले ही से माँग है। श्री शांति नारायण ग्रौर राष्ट्रीय परिषद् की ओर से इस पुस्तक के संबंध में पाठकों के सुझाव ग्रामंत्रित हैं।

नई दिल्ली

एल० एस० चंद्रकांत

आमुख

सारे संसार में अनेक व्यक्ति नई परिकल्पनाओं और तकनीकों से युक्त गणित की रचना करने में व्यस्त रहे हैं। इन परिकल्पनाओं और तकनीकों का उस समाज पर बहुत गहरा प्रभाव रहा है जो क्रांतिकारी परिवर्तनों में से गुजर रहा है। तथापि इस विकास का हमारे देश में गणित-शिक्षण (अनुदेश) के कार्यक्रमों पर, विशेष रूप से स्कूल स्तर पर कोई प्रभाव नहीं पड़ा था। उच्चतर माध्यमिक स्कूलों में छात्रों को जो कुछ आज पढ़ाया जा रहा है, कदाचित वही उनके बाप-दादों को भी पढ़ाया जाता था। इसका अर्थ यह है कि हमारा शिक्षण (अनुदेश) गणित के विकास के साथ कदम मिला कर नहीं चल पाया। परिणाम यह है कि हम अपने राष्ट्रीय विकास के परिवर्धन में गणित का उतना विस्तृत उपयोग नहीं कर पाए हैं जितना अन्य लोगों ने किया है। साथ ही, गणित-रचना की प्रक्रिया में हम पूर्ण रूप से भाग नहीं ले पाए हैं।

आधुनिक गणितीय विचार भारत के कुछ स्नातकोत्तर पाठ्यक्रमों में प्रतिबिम्बित होने लगा है। किन्तु दुर्भाग्य से, यह केवल अध्यारोपित ही है और गणितीय विकास के विकास संबंधी गुण को पहचान सकने में यह असफल रहा है। यदि ऐसा न होता तो स्कूल के गणित-कार्यक्रम आधुनिक गणितीय विचार अर्थात् तथाकथित प्राथमिक गणित के विकास से प्रभावित होते। इस प्रकार गणित के विकास और स्कूल की विभिन्न कक्षाओं में गणित-शिक्षण के मध्य सतत अंतर्संप्रेषण बनाए रखने की आवश्यकता है। हर दस वर्ष में दुगुने हो जाने वाले गणितीय ज्ञान के प्रचार-प्रसार के साथ गणित-शिक्षण के कार्यक्रमों के सुधार के लिए सतत प्रयत्न भी समान रूप से अभीष्ट हैं।

यहाँ प्रस्तुत की जा रही गणित-सामग्री उस गणित से अधिक प्रेरणादायक एवं रोचक सिद्ध होगी जिसे हम लोग अभी तक अपने स्कूलों में पढ़ाते रहे हैं और जिसका अर्थ केवल कुछ नियमों को याद करना मात्र रहा है। यह सोचना गलत होगा कि इस नई सामग्री से कठिनाई बढ़ जाएगी। हालाँकि दुर्भाग्य से ऐसा सोचा जाता रहा है। पर हमें ऐसी भावना को प्रश्रय नहीं देना चाहिए। नए कार्यक्रम को जाने बिना उसके बारे में गलत सोचना या उससे डरना ठीक न होगा।

अपरिभाषित परिकल्पनाओं और असिद्ध प्रस्थापनाओं से प्रारंभ करके विषय के स्वतः सिद्ध प्रस्तुतीकरण का उद्देश्य यद्यपि इस स्तर पर अभीष्ट नहीं है, तथापि हमें आशा है कि वर्तमान प्रस्तुतीकरण परिभाषाओं और प्रमाणित करने की प्रक्रिया का अवबोधन ग्रहण करने की छात्रों की वर्तमान परिपक्वता की दृष्टि से उनका सहायक सिद्ध होगा। खेद की बात है कि लोग सोचते रहे हैं कि जहाँ रेखागणित में हम सिद्ध करते हैं, वहाँ बीजगणित में केवल करके ही रह जाते हैं। ऐसा सोचना सचाई के साथ न्याय करना नहीं है।

छात्र इस पुस्तक की मूल भावना को वास्तव में हृदयंगम कर सकें, इसके लिये उन्हें केवल इन अभ्यासों को करने की बजाय, पुस्तक पढ़ने की सहायता दी जाती है। पुस्तक को ध्यान से पढ़ने के अलावा और कोई विकल्प नहीं है। अध्यापक को चाहिए कि वह छात्र को पढ़ने और पढ़े हुए को अंतर्धारित करने के लिए प्रोत्साहित करे।

यह पुस्तक विषय वस्तु और प्रस्तुतीकरण की दृष्टि से क्रांतिकारी परिवर्तन प्रस्तुत करती है फिर भी लेखकों का ऐसा कोई दावा नहीं है कि अपेक्षित विषय पर यही पुस्तक सब कुछ है। तो भी यह अनुरोध किया जाता है कि इसका उपयोग किया जाए। यदि यह पुस्तक रचनात्मक सुझाव देने वाली लाभप्रद चर्चाओं को जन्म दे सकी तो लेखकों का परिश्रम सार्थक सिद्ध होगा।

इस पुस्तक को प्रकाशित करने के लिये राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद् के प्रति लेखक द्वय आभारी हैं। सभी ओर से प्राप्त होने वाले हार्दिक सहकार इस दिशा में सुधार हेतु शुभ लक्षण हैं। परिषद् ने अपने विज्ञान शिक्षा विभाग के वरिष्ठ अनुसंधान अधिकारी श्री रामचरण शर्मा की सेवाएँ प्रदान कीं जिन्होंने पांडुलिपि पढ़कर काफी उपयोगी सुझाव दिए। पुस्तक-निर्माण में मिली सहायता के लिए हम कुमारी नीलिमा के प्रति भी आभारी हैं। राजेन्द्र प्रिंटर्ज़ और विशेषतः श्री रवीन्द्र गुप्ता भी अनुवाद के मुद्रण की सुन्दरता के लिए धन्यवाद के पात्र हैं।

दिल्ली

शान्ति नारायण
मोहन लाल

अनुवादकीय

नए भारत में नई पीढ़ी द्वारा माध्यम-परिवर्तन की माँग सर्वथा उचित है। सरकारी और गैर-सरकारी स्तर पर इस माँग को पूरा करने के प्रयत्न भी होते रहे हैं। इस दिशा में सबसे बड़ी कठिनाई गणित और विज्ञान की मानक पाठ्यपुस्तकों का अभाव मानी जाती रही है। अध्यापक होने के नाते इस अभाव को दूर करने में यथाशक्ति सहायक होना हम अपना उत्तरदायित्व समझते थे। यह अभिलाषा प्रिंसिपल शान्ति नारायण जी के सत्परामर्श से प्रस्तुत अनुवाद के रूप में क्रियान्वित हुई।

प्रचलित अनुवादों में शब्दानुवाद की प्रवृत्ति प्रधान रहती है। संभवत: इसका कारण यह है कि अधिकतर अनुवादक या तो विषय से अनभिज्ञ होते हैं, या भाषा से। प्रस्तुत कार्य में हम लोगों ने पारस्परिक सहयोग से इस बाधा पर विजय प्राप्त की है। हमारा विश्वास है कि पाठकों को यह पुस्तक अनुवाद की अपेक्षा मौलिक रचना अधिक प्रतीत होगी। हम लोगों ने मूल पुस्तक के भावों की रक्षा करते हुए भाषा की प्रकृति का भी पूरा ध्यान रखा है। फिर भी कहीं कहीं विषय की प्रतिबद्धता के कारण हिन्दी की प्रकृति के प्रतिकूल वाक्य रचना करनी पड़ी है। उदाहरणार्थ "अधिक है···से," "खंड है···का" आदि को लिया जा सकता है।

भाषा की क्लिष्टता का परिहार करने की भी यथासंभव चेष्टा की गई है। पाठकों को जहाँ कहीं क्लिष्टता दिखाई देगी, वहाँ पारिभाषिक शब्दों और वाक्यों की अनिवार्यता ही कारण रही है। उदाहरणार्थ निर्मेयों में पारिभाषिक अनिवार्यता न होने से भाषा सहज हो गई है।

पारिभाषिक शब्दों का अधिकतम चुनाव भारत सरकार द्वारा स्वीकृत शब्दावली में से किया गया है। परंतु कई स्थानों पर डा० रघुवीर की Comprehensive English-Hindi Dictionary को प्राथमिकता देनी पड़ी है। जैसे, Detached Co-efficients के लिए अनासक्त गुणांक न लेकर पृथक्-कृत गुणांक लिया गया है। कहीं-कहीं 'खुले कूपन' (Open Statements) जैसे नए शब्द भी ढूंढ़ने पड़े हैं।

अंकों और प्रतीकों के प्रयोग में अंतर्राष्ट्रीय पद्धति को स्वीकार करना पड़ा है। इसका मुख्य कारण बहु-प्रचलन है। सामान्यतः, दूसरे देशों की भाषाओं में भी इसी पद्धति को अपनाया गया है। साथ ही उच्चस्तरीय अध्ययन और शोध कार्य में इसी पद्धति के प्रचलित होने से हमारे पाठकों को भविष्य में कठिनाई नहीं होगी।

पाठकों की सुविधा के लिए पुस्तक के अंत में पारिभाषिक शब्दों और वाक्यांशों की हिन्दी-अंग्रेजी सूची अकारादि क्रम से दी गई है। इसी प्रकार पुस्तक के प्रारंभ में प्रतीक-सूची भी संलग्न है।

इस कार्य में जिन व्यक्तियों और संस्थाओं का सहयोग हमें प्राप्त हुआ, उनके प्रति आभार प्रदर्शन करना हमारा पुनीत कर्त्तव्य है। सर्वप्रथम इस कार्य के प्रेरणा-स्रोत श्रद्धेय प्रिंसिपल शान्ति नारायण

जी का नाम उल्लेखनीय है। समय-समय पर हम उनके अमूल्य सुझावों से लाभान्वित हुए हैं। पूरी रुचि लेकर इस अनुवाद के प्रकाशन की सुविधा प्रदान करने के लिए हम राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद् के भी आभारी हैं।

प्रस्तुत अनुवाद गणित के छात्रों, अध्यापकों, लेखकों और अनुवादकों के लिए किंचित् उपयोगी सिद्ध हुआ तो हम अपने श्रमदान को सार्थक समझेंगे।

अनुवाद-संबंधी किसी भी सुझाव का हम हृदय से स्वागत करेंगे।

मोहन, कृष्ण
जगदीश, महेन्द्र

प्रतीक-सूची

(List of Symbols)

मुख्य समुच्चयों के प्रतीक (Principal Sets)

N	धन-संख्याओं का समुच्चय	The set of natural numbers
न	भिन्नों का समुच्च्य	The set of fractions
I	पूर्ण संख्याओं का समुच्चय	The set of integers
Q_0	अ-शून्य परिमेय संख्याओं का समुच्चय	The set of non-zero rationals
Q	परिमेय संख्याओं का समुच्चय	The set of rational numbers

समुच्चयों और तर्कशास्त्र के प्रतीक (Set and logic)

$\cup$	समुच्चयों का संघ	Union of sets
$\wedge$	समुच्चयों का सर्वनिष्ठ	Inter section of seets
$\in$	निहित है	Belongs to
$\notin$	निहित नहीं है	Does not belong to
$\subset$	उपसमुच्चय है	Is a sub-set of
ϕ	वस्तु-रहित समुच्चय	Null set
$\forall$	सभी के लिए	For all
.	जहाँ (जिसके लिए)	Such that
$\Rightarrow$	के फलस्वरूप	Implies
$\Leftarrow$	फलस्वरूप है···के	Is implied by
$\Leftrightarrow$	तुल्यरूप है···के	Is equivalent to
$\exists$	विद्यमान है	There exists

संयोजकों के प्रतीक (Compositions)

$+$	योग	Addition
$\times$	गुणन	Multiplication
$-$	व्यवकलन	Subtraction
$\div$	विभाजन	Division

संबंधों के प्रतीक (Relations)

$=$	बराबर है···के	Is equal to
$\neq$	बराबर नहीं है···के	Is not equal to
$>$	अधिक है···से	Is greater than

$<$	न्यून है···से	Is less than
$\geqslant$	अधिक है···से अथवा बराबर है···के	Is greater than or equal to
$\leqslant$	न्यून है···से अथवा बराबर है के	Is less than or equal to
$\not>$	अधिक नहीं है···से	Is not greater than
$\not<$	न्यून नहीं है···से	Is not less than
$\mid$	खंड है···का	Is a factor of
$\nmid$	खंड नहीं है···का	Is not a factor of

विषय-सूची

अध्याय 1

धन-संख्याएँ

संयोजन और संबंध

अध्याय 2

प्रारम्भिक संख्या सिद्धांत

N में विभाज्यता

अध्याय 3

भिन्न

अध्याय 4

परिमेय संख्याएँ

अध्याय 5

रैखिक समीकरण

एकल और निकाय

अध्याय 6

द्विघात समीकरण

परिशिष्ठ

1

धन-संख्याएँ: संयोजन और संबंध

1. भूमिका

गणित के साथ बच्चे का प्रथम संपर्क गणन-संख्याओं अथवा धन-संख्याओं की पढ़ाई आरंभ होते ही हो जाता है।

वस्तुओं के विभिन्न समुच्चयों के परिचय से बच्चे का गणन-संख्याओं का बोध विकसित होता है। किसी अकेली वस्तु के प्रत्येक समुच्चय के साथ वह संख्या 'एक' का संबंध जोड़ना सीखता है। फिर अकेली वस्तु वाले किसी समुच्चय में एक नई वस्तु मिला देने पर एक और समुच्चय बन जाता है जिसका संबंध संख्या 'दो' से होता है। आगे चलकर ज्यों-ज्यों हम पहले बने हुए समुच्चयों में एक-एक करके नई वस्तुएँ मिलाते जाते हैं त्यों-त्यों ऐसे समुच्चय बनते जाते हैं जिनका संबंध उत्तरोत्तर संख्याओं

तीन, चार, पाँच, छः, सात...............

से होता है।

संख्याओं के इस प्रकार बने हुए समुच्चय को धन-संख्याओं का समुच्चय कहते हैं।

नई वस्तुओं को मिलाने की यह प्रक्रिया स्पष्टतः अनंत है। इसका अभिप्राय यह है कि कोई भी धन संख्या अंतिम नहीं है और प्रत्येक धन-संख्या की उत्तरवर्ती धन-संख्या होती है। इसी आधार पर धन-संख्याओं के समुच्चय को अनंत कहा जाता है।

इस प्रकार धन-संख्याओं के अनंत समुच्चय के प्रत्येक अंग को पृथक रूप से व्यक्त करने के लिए असंख्य प्रतीकों की आवश्यकता होगी। अतः थोड़े से मूल-प्रतीकों के द्वारा धन-संख्याओं को प्रस्तुत करने की विधि आवश्यक हो जाती है। इतना ही नहीं, इस विधि की वैज्ञानिक और अंतर्राष्ट्रीय स्वीकृति विविध स्तरों पर पारस्परिक विचार-विनिमय के लिये नितांत आवश्यक है। स्पष्टतः विभिन्न व्यक्तियों द्वारा विभिन्न विधियों के प्रयोग से अव्यवस्था उत्पन्न हो जाएगी।

विश्वसभ्यता के सौभाग्य से इन दोनों आवश्यकताओं की पूर्ति करने वाली विधि का आविष्कार भारत में हिन्दुओं ने किया। स्थान-मान पद्धति के नाम से प्रसिद्ध इस विधि से हम किसी भी नियत धन-संख्या को थोड़े से परिमित प्रतीकों द्वारा अभिव्यक्त कर सकते हैं। साथ ही इस विधि के ग्रहण से संख्याओं के योग और गुणन की प्रक्रियाएँ सरल हो जाती हैं।

स्थान-मान पद्धति की आधारभूत धारणा से किसी भी धन-संख्या को दो अथवा अधिक मूल प्रतीकों से प्रस्तुत किया जा सकता है। मूल प्रतीकों की विभिन्न संख्याओं के प्रयोग से विभिन्न पद्धतियाँ बनती हैं। ये पद्धतियाँ विभिन्न संख्यान पद्धतियाँ भी कहलाती हैं। इनमें सर्वाधिक प्रचलित दशमलव पद्धति है। इस पद्धति में '0' प्रतीक के साथ निम्नलिखित नौ प्रतीकों का प्रयोग होता है :

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$$

'0' प्रतीक को हिन्दुओं ने शून्य कहा और इसी को अंग्रेजी भाषा में जीरो (Zero) कहते हैं। उदाहरणार्थ, संख्या तीन सौ सैंतालीस को दशमलव पद्धति में

$$347$$

लिखा जाता है।

इस प्रकार $347 = 3 \times 10 \times 10 + 4 \times 10 + 7$
$= 3 \times 100 + 4 \times 10 + 7$

इसमें प्रतीक 3, 4, 7 क्रमशः

3 सैंकड़ों, 4 दहाइयों, 7 इकाइयों

के लिए हैं।

प्रतीक 3, 4, 7 के स्थानों को बदलने पर निम्नलिखित संख्याएं बन जाती हैं :

$$374 = 3 \times 10 \times 10 + 7 \times 10 + 4 = 3 \times 100 + 7 \times 10 + 4$$
$$437 = 4 \times 10 \times 10 + 3 \times 10 + 7 = 4 \times 100 + 3 \times 10 + 7$$
$$473 = 4 \times 10 \times 10 + 7 \times 10 + 3 = 4 \times 100 + 7 \times 10 + 3$$
$$734 = 7 \times 10 \times 10 + 3 \times 10 + 4 = 7 \times 100 + 3 \times 10 + 4$$
$$743 = 7 \times 10 \times 10 + 4 \times 10 + 3 = 7 \times 100 + 4 \times 10 + 3$$

इन तीनों अंकों में से दाईं ओर का प्रथम अंक इकाइयों को, उसके बाईं ओर अगला अंक दहाइयों को और उसके भी बाईं ओर का अंक दस दहाइयों (सैंकड़ों) को व्यक्त करता है।

एक और उदाहरण लीजिए। धन-संख्या तीन सौ चार को दशमलव पद्धति में

$$304$$

लिखेंगे। इस प्रकार इसमें चार इकाइयाँ और तीन सैंकड़े हैं, परंतु दहाई कोई नहीं।

दूसरे शब्दों में

$$304 = 3 \times 10 \times 10 + 4 = 3 \times 100 + 4$$

इसी भाँति छात्र 587, 32, 5329 जैसी कुछ संख्याएँ विस्तृत रूप में लिखें।

स्थान-मान पद्धति के अनुसार धन-संख्याओं को व्यक्त करने के लिए प्रतीकों की किसी विशेष

संख्या का प्रयोग करना अनिवार्य नहीं है। हम कितने ही प्रतीक ले सकते हैं और इनकी भिन्न-भिन्न संख्याओं से विभिन्न पद्धतियाँ बन जाएँगी। यद्यपि प्रायः सभी उद्देश्यों के लिए दशमलव पद्धति का प्रयोग होता रहा है और हो रहा है, फिर भी

$$0,\ 1$$

प्रतीकों वाली द्वि-आधारी पद्धति कुछ समय से विज्ञान में बहुत महत्त्वपूर्ण हो गई है। तीव्र गति वाले कम्प्यूटरों का काम द्वि-आधारी पद्धति के प्रयोग से ही होता है। यह उल्लेखनीय है कि तीव्र गति से सभी प्रकार की संख्यात्मक गणना करने वाले कम्प्यूटरों के नवीन विकास ने वैज्ञानिक अनुसंधान के नए क्षितिज खोल दिए हैं। उदाहरण के लिए स्पुतनिक बनाने में जितनी अधिक गणनाओं की आवश्यकता है, वे कम्प्यूटर के बिना असंभव ही रहतीं। यह भी उल्लेखनीय है कि कम्प्यूटर द्वारा हम 'π' का मूल्य 8 घंटे 40 मिनट में 10·264 दशमलव स्थानों तक निकाल पाए हैं।

इस पुस्तक में प्रायः दशमलव पद्धति का ही प्रयोग किया गया है। दूसरी पद्धतियों का प्रयोग करने पर उनका विशेष उल्लेख कर दिया गया है।

संख्याएँ और संख्यांक—कभी-कभी हम संख्याओं और संख्यांकों में भेद करते हैं। संख्या एक धारणा है और संख्यांक उसका एक प्रतीक है। किसी एक संख्या को हम अनेक संख्यांकों में व्यक्त कर सकते हैं। उदाहरणार्थ

$$2+4,\ 2\times 3,\ 9-3,\ 24\div 4,\ 6$$

संख्या 6 के लिए ही विभिन्न संख्यांक हैं।

प्रश्नावली

जाँच कर देखिए कि प्रत्येक वर्ग के संख्यांक एक ही संख्या को व्यक्त करते हैं अथवा नहीं।

(*i*) 8×7 तथा $20-5$ (*ii*) 9×3 तथा 39
(*iii*) $8\div 2$ तथा $6-2$ (*iv*) $9+(3\times 2)$ तथा 12
(*v*) $12-(5\times 2)$ तथा $4\div 2$
(*vi*) $36\div(4+2)$ तथा $(36\div 4)+(36\div 2)$
(*vii*) $9+(7-2)$ तथा $2+(36\div 3)$ (*viii*) $(3+2)+4$ तथा $3+(2+4)$
(*ix*) $2\times(9-6)$ तथा $(2\times 9)-(2\times 6)$

यह उल्लेखनीय है कि विभिन्न स्थान-मान पद्धतियों में एक ही संख्या को व्यक्त करने वाले संख्यांक भिन्न-भिन्न होंगे। पुस्तक के परिशिष्ट भाग में इसकी व्याख्या विस्तार से की गई है।

एक ही संख्या को व्यक्त करने के लिए यवन, रोमन, अरबी आदि भिन्न-भिन्न संख्यांक भी होते हैं।

सिद्धांत में संख्या और संख्यांक का भेद महत्त्वपूर्ण है परंतु व्यवहार में हम ऐसा भेद नहीं करेंगे।

2. योग और गुणन संयोजनों के मूल नियम

यह मानकर कि अब छात्र योग और गुणन संबंधी किसी भी परिकलन को करने में कुशल हैं, हम इस अध्याय में उनका ध्यान परिकलन करने की पद्धतियों में निहित मूल गुणधर्मों की ओर आकृष्ट करेंगे। हम यहाँ पर विभिन्न संयोजनों को नई दृष्टि से देखने और कुछ विद्यमान मूल नियमों को जानने का प्रयत्न करेंगे। अन्य मूल नियमों की भाँति ही मूल नियम भी सरल दिखाई देते हैं परंतु बड़े गंभीर और अर्थ-पूर्ण हैं। स्पष्टता और ऊपरी क्षुद्रता के कारण इनके मूल स्वरूप का महत्त्व कम नहीं समझना चाहिए। यहाँ हम इन नियमों का केवल निर्धारण और उल्लेख करेंगे। यह उल्लेखनीय है कि यांत्रिक ढंग से सीखे हुए क्रमों और निर्देशों के अनुसार किए जाने वाले योग और गुणन संयोजनों की प्रक्रियाएँ इन नियमों के अस्तित्व और प्रयोग पर आधारित हैं। अंततः हम कह सकते हैं कि ये नियम परिकलन क्रियाविधि की वैज्ञानिकता को स्पष्ट करते हैं।

योग संयोजन—उदाहरण के लिए हम 7 पुस्तकों और 4 पुस्तकों के दो समुच्चयों पर विचार करते हैं। सात पुस्तकों के समुच्चय में चार पुस्तकों का समुच्चय मिलाने से एक नया समुच्चय बनता है जिसके साथ हम धन-संख्या $7+4$ का संबंध जोड़ते हैं। यह धन-संख्या 7 और 4 का इसी क्रम में योगफल है। इस प्रकार धन संख्या 7 और 4 के क्रमित युग्म के साथ हम धन-संख्या $7+4$ का संबंध जोड़ते हैं, जो उनका योगफल कहलाती है। इसी भाँति हम धन-संख्या a और b के क्रमित युग्म का संबंध धन-संख्या

$$a+b$$

से जोड़ते हैं, जो a और b का इसी क्रम में योगफल है।

अतः किन्हीं दो धन-संख्याओं के क्रमित युग्म a, b के साथ हम एक अद्वितीय धन-संख्या का संबंध जोड़ सकते हैं, जो उनका योगफल कहलाती है और जिसे व्यक्त करने वाला प्रतीक

$$a+b$$

है। इस प्रकार धन-संख्याओं के समुच्चय में योग-संयोजन की परिभाषा हो गई।

योग का क्रम-विनिमेय नियम—यदि पुस्तकों के समुच्चयों के उपर्युक्त उदाहरण में हम चार पुस्तकों के समुच्चय के साथ सात पुस्तकों का समुच्चय मिलाते तो नए समुच्चय में पुस्तकों की संख्या पहले वाले समुच्चय की संख्या के समान ही होती। इस स्थिति का वर्णन हम

$$4+7=7+4$$

लिख कर करते हैं और यह देखते हैं कि 4 और 7 के क्रम-विनिमय से योगफल नहीं बदलता। इस प्रकार

$$4+7=7+4$$

एक सच्चा कथन है। जो कथन सच्चा हो उसे 'सत्य कथन' कहेंगे। और जो कथन सच्चा न हो उसे 'मिथ्या कथन' कहेंगे।

निम्नलिखित सभी कथन

$$2+3=3+2,\ 7+9=9+7,\ 24+37=37+24$$

सत्य कथन हैं।

इस प्रकार हम योग के प्रथम मूल गुण-धर्म को पहचानते हैं जो 'योग का क्रम-विनिमेय-नियम' कहलाता है।

हमें यह ध्यान रखना होगा कि ऊपर का प्रत्येक सत्य कथन योग के क्रम-विनिमेय नियम का केवल एक उदाहरण है, कथन नहीं। नियम का कथन तो इस प्रकार होगा :

योग का क्रम-विनिमेय नियम

किन्हीं दो धन-संख्याओं a, b के लिए

$$a+b=b+a$$

यहाँ a, b किन्हीं विशेष धन-संख्याओं के लिए नहीं आए हैं। a और b के स्थान में कोई भी धन-संख्याएँ रखने पर समता सत्य ही रहेगी। उदाहरणार्थ

यदि $a=3$ और $b=5$

तो $3+5=5+3$

सत्य है।

प्रश्नावली

1. योग के उस नियम का नाम बताइए जिसके आधार पर निम्नलिखित कथन सत्य हैं :

 (i) $25+27=27+25$ (ii) $37+44=44+37$

 (iii) $98+75=75+98$ (iv) $77+9=9+77$

2. कुछ ऐसे कथन दीजिए जो योग के क्रम-विनिमेय नियम के आधार पर सत्य हैं।

3. निम्नलिखित प्रत्येक कथन सत्य है। प्रत्येक वर्ग में x कौन-सी धन संख्या है?

 (i) $12+17=17+x$ (ii) $29+x=15+29$

 (iii) $x+44=44+19$ (iv) $77+9=x+77$

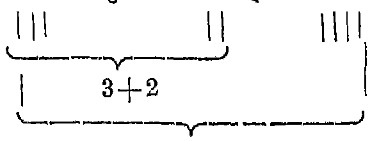
 (v) $x+21=21+39$ (vi) $105+4=4+x$

 (vii) $47+33=x+47$ (viii) $25+x=14+25$

योग का साहचर्य-नियम—अब तक हमने दो धन-संख्याओं से संबद्ध क्रम-विनिमेय नियम का विचार किया। अब हम योग के उस नियम को पहचान कर सूत्रित करेंगे जिसका संबंध तीन धन-संख्याओं से है।

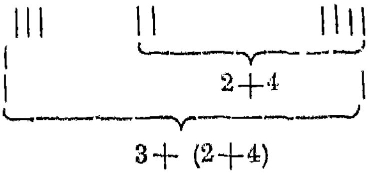
मान लीजिए कि हमारे पास तीन, दो और चार पैंसिलों के तीन समुच्चय हैं। हम निम्नलिखित दो विभिन्न प्रक्रियाओं पर विचार करते हैं :

I. हम तीन पैंसिल वाले समुच्चय के साथ दो पैंसिल वाला समुच्चय मिलाते हैं और इस नए समुच्चय के साथ चार पैंसिल वाला समुच्चय मिलाते हैं।



$(3+2)+4$

II. हम दो पैंसिल वाले समुच्चय के साथ चार पैंसिल वाला समुच्चय मिलाते हैं और फिर तीन पैंसिल वाले समुच्चय के साथ इस नए समुच्चय को मिलाते हैं।



इन दोनों प्रक्रियाओं से प्राप्त समुच्चयों में पैंसिलों की संख्या समान रहती है। फलतः

$$(3+2)+4=3+(2+4)$$

यह ध्यान देने योग्य है कि हमने किसी संख्या का स्थान न बदल कर केवल दोनों पक्षों की संख्याओं के साहचर्य की रीति बदली है। यह योग के साहचर्य-नियम का एक उदाहरण है। इस नियम को इस प्रकार लिखते हैं :

योग का साहचर्य नियम

किन्हीं तीन धन संख्याओं a, b, c के लिए

$$(a+b)+c=a+(b+c).$$

योग के साहचर्य-नियम का प्रयोग करने पर निम्नलिखित सभी कथन सत्य सिद्ध होते हैं :

(*i*) $(7+5)+9=7+(5+9)$

(*ii*) $(23+12)+8=23+(12+8)$

(*iii*) $(11+55)+44=11+(55+44)$

(*iv*) $(21+18)+72=21+(18+72)$

(*v*) $(15+27)+108=15+(27+108)$.

यह कहना उचित होगा कि विचाराधीन नियम का वर्णन करने के लिए साहचर्य शब्द का प्रयोग करने का कारण इस नियम का समता चिह्न के दोनों पक्षों की संख्याओं के साहचर्य की विभिन्न रीतियों से संबंधित होना है।

यह भी ध्यान देने योग्य है कि योग के इस नियम के कारण किन्हीं तीन धन-संख्याओं a, b, c के योगफल को

$$a+b+c$$

के रूप में लिख सकते हैं। यह व्यंजक समान योगफलों

$$a+(b+c) \text{ अथवा } (a+b)+c$$

के बराबर है।

प्रश्नावली

1. योग के उस नियम का नाम बताइए जिसके आधार पर निम्नलिखित कथन सत्य हैं।

(i) $7+(5+3)=(7+5)+3$
(ii) $(9+21)+5=9+(21+5)$
(iii) $13+(11+8)=(13+11)+8$
(iv) $(8+35)+27=8+(35+27)$

2. कुछ ऐसे कथन दीजिए जो योग के साहचर्य नियम के आधार पर सत्य हैं।

3. निम्नलिखित प्रत्येक कथन सत्य है। प्रत्येक वर्ग में y कौन-सी धन-संख्या है ?

(i) $(13+17)+5=13+(17+y)$
(ii) $19+(y+2)=(19+13)+2$
(iii) $(15+y)+17=15+(11+17)$
(iv) $(7+4)+y=7+(4+12)$
(v) $y+(7+3)=(13+7)+3$
(vi) $17+(24+11)=(y+24)+11$

क्रमविनिमेय और साहचर्य नियमों का युगपत् प्रयोग—प्रायः ऐसा हो जाता है कि किसी एक ही प्रश्न में हम क्रमविनिमेय और साहचर्य नियमों का एक साथ प्रयोग करते हैं। नीचे के दो उदाहरणों से सिद्ध होगा कि इन नियमों की सहायता से कई बार कुछ परिकलन इतनी सरलता से किए जा सकते हैं, जितनी सरलता अन्यथा संभव नहीं। दूसरे शब्दों में ये नियमों पर आधारित लघु रीतियों के प्रयोग के उदाहरण हैं। नियमों के इस प्रयोग से प्रायः परिकलन क्रियाविधि अधिक सरल हो जाती है। संकेत य क योग के क्रमविनिमेय नियम के प्रयोग का और संकेत य स योग के साहचर्य नियम के प्रयोग का सूचक है। इस प्रकार संकेत य क योग की क्रमविनिमेयता का और संकेत य स योग की सहचारिता का सूचक है।

उदाहरण

1. $(25+37)+75=(37+25)+75$ य क
$=37+(25+75)$ य स
$=37+100$
$=100+37=137$ य क

4. $(9+380)+11=(380+9)+11$ य क
$=380+(9+11)$ य स
$=380+20$
$=400$

टिप्पणी—व्यवहार में योग के इन दो नियमों पर आधारित रूपांतर मन ही मन कर लिए जाते हैं।

प्रश्नावली

1. प्रत्येक चरण पर प्रयुक्त योग के विशेष नियम का उल्लेख करते हुए निम्नलिखित योगफल लघुरीति द्वारा निकालिए :

(*i*) $(9+48)+1$ (*ii*) $9+(380+11)$

(*iii*) $(12+431)+88$ (*iv*) $75+(633+25)$

(*v*) $37+(63+24)$ (*vi*) $57+(28+143)$

(*vii*) $14+(36+8)$ (*viii*) $146+(7+24)$

2. निम्नलिखित सभी कथन सत्य हैं। प्रत्येक वर्ग में x कौन-सी धन-संख्या है। क्रम-विनिमेय और साहचर्य नियमों द्वारा अपने उत्तर का समर्थन कीजिए।

(*i*) $(7+x)+11=(11+7)+8$ (*ii*) $(5+3)+x=(4+3)+5$

(*iii*) $(15+x)+11=11+(14+15)$ (*iv*) $(x+24)+11=7+(24+11)$

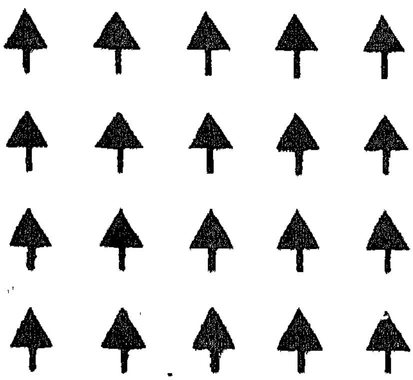
(*v*) $(23+x)+17=(17+9)+23$ (*vi*) $(17+14)+x=(9+14)+17$

3. निम्नलिखित को बाएँ से दाएं और दाएं से बाएँ जोड़कर सरल कीजिए। योग के दोनों नियमों के आधार पर दोनों रीतियों द्वारा एक ही उत्तर पाने का समर्थन भी कीजिए।

(*i*) $15+17+18$ (*ii*) $25+29+38$

(*iii*) $87+59+63$ (*iv*) $77+99+33.$

गुणन-संयोजन—पाँच-पाँच वृक्षों वाली चार पंक्तियाँ लीजिये। पंक्तियों में गिनने से वृक्षों की कुल संख्या $5+5+5+5$ होगी जिसे हम 4×5 लिखते हैं। इस प्रकार धन-संख्या 4 और 5 के क्रमित युग्म के साथ हम धन-संख्या 4 ; 5 का संबंध जोड़ते हैं जो उनका गुणन-फल कहलाती है। व्यापक रूप में यदि हम b वृक्षों वाली a पंक्तियों को लेते तो वृक्षों की कुल संख्या $b+b+\ldots(a$ बार) होती, जिसे हम $a\times b$ लिखते हैं। इस प्रकार धन-संख्या a और b के क्रमित युग्म के साथ हम धन संख्या



$$a\times b$$

का संबंध जोड़ते हैं जो a और b का इसी क्रम में गुणन-फल है।

अतः किन्हीं दो धन-संख्याओं के क्रमित युग्म a और b के साथ हम एक अद्वितीय धन-संख्या का संबंध

जोड़ सकते हैं जो इनका गुणनफल कहलाती है और जिसे व्यक्त करने वाला प्रतीक

$$a \times b$$

है। इस प्रकार धन-संख्याओं के समुच्चय में गुणन-संयोजन की परिभाषा हो गई। संख्याओं के प्रतीक अक्षर हों तो a और b का गुणन-फल निम्नलिखित किसी एक रीति से लिखा जा सकता है :

$$a \times b,\ a.b,\ ab.$$

गुणन के नियम—योग के दो नियमों के ठीक समान ही गुणन के भी क्रमविनिमेय और साहचर्य नियम हैं जिनका हम अब वर्णन करेंगे।

गुणन का क्रमविनिमेय-नियम—वृक्षों के उपर्युक्त उदाहरण में हम उनकी गणना स्तम्भों में भी कर सकते थे। पाँच स्तम्भ हैं और प्रत्येक स्तम्भ में चार-चार वृक्ष हैं।

इसलिए कुल संख्या

$$4+4+4+4+4=5\times 4$$

होगी।

क्योंकि वृक्षों की संख्या तो वही है इसलिए

$$4\times 5 = 5\times 4$$

अतः यह गुणन के क्रमविनिमेय-नियम का एक उदाहरण है। इस नियम को हम इस प्रकार लिखते हैं :

गुणन का क्रमविनिमेय-नियम

किन्हीं दो धन संख्याओं a, b के लिए

$$a\times b = b\times a$$

प्रश्नावली

1. गुणन के उस नियम का नाम बताइए जिसके आधार पर निम्नलिखित कथन सत्य हैं :

(*i*) $15\times 13 = 13\times 15$ (*ii*) $8\times 24 = 24\times 8$

(*iii*) $107\times 43 = 43\times 107$ (*iv*) $7\times 48 = 48\times 7$

2. कुछ ऐसे कथन दीजिए जो गुणन के क्रमविनिमेय-नियम के आधार पर सत्य हैं :

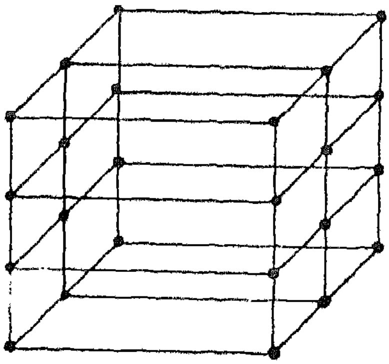
3. निम्नलिखित प्रत्येक कथन सत्य है। प्रत्येक वर्ग में x कौन-सी धन-संख्या है ?

(*i*) $x\times 73=73\times 24$ (*ii*) $29\times x=69\times 29$

(*iii*) $33\times 47=x\times 33$ (*iv*) $61\times 72=72\times x$

गुणन का साहचर्य-नियम—एक ऐसा आयताकार ढाँचा लीजिए जिसकी दो समांतर भुजाओं

में तीन-तीन मनके हों। इस प्रकार के चार ढाँचों को एक दूसरे के ऊपर रखने से एक ऐसी संरचना बनेगी जैसी चित्र में दिखाई गई है। मनकों की कुल संख्या ज्ञात करनी है।



प्रत्येक क्षैतिज ढाँचे में मनकों की कुल संख्या है।

$$3 \times 2$$

क्षैतिज ढाँचों की कुल संख्या 4 होने के कारण मनकों की कुल संख्या

$$(3 \times 2) \times 4$$

होगी।

पुन: पूरी संरचना को 3 उदग्र ढाँचों से बनी हुई भी समझा जा सकता है।

क्योंकि प्रत्येक उदग्र ढाँचे में मनकों की संख्या 2×4 है, इसलिए मनकों की कुल संख्या

$$3 \times (2 \times 4)$$

होगी।

किसी भी रीति से देखने पर पूरी संरचना में मनकों की संख्या वही है, इसलिए,

$$(3 \times 2) \times 4 = 3 \times (2 \times 4)$$

यह गुणन के साहचर्य-नियम का एक विशेष उदाहरण है। इस नियम को हम औपचारिक रूप में इस प्रकार लिखते हैं :

गुणन का साहचर्य-नियम

किन्हीं तीन धन-संख्याओं a, b, c के लिए

$$a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$$

टिप्पणी—संकेत ग क गुणन के क्रमविनिमेय नियम का और संकेत ग स गुणन के साहचर्य-नियम का सूचक होगा।

प्रश्नावली

1. गुणन के उस नियम का नाम बताइए जिसके आधार पर निम्नलिखित कथनसत्य हैं :

   (*i*) $(17 \times 9) \times 13 = 17 \times (9 \times 13)$

   (*ii*) $(25 \times 4) \times 107 = 25 \times (4 \times 107)$

   (*iii*) $(37 \times 24) \times 7 = 37 \times (24 \times 7)$

   (*iv*) $(102 \times 5) \times 37 = 102 \times (5 \times 37)$

2. कुछ ऐसे कथन दीजिए जो गुणन के साहचर्य-नियम के आधार पर सत्य हैं।

3. निम्नलिखित प्रत्येक कथन सत्य है। प्रत्येक वर्ग में x क्या है ?

   (*i*) $(7 \times x)20 \quad = (7 \times 25) \times 20$

(ii) $(x \times 13) \times 17 = 21 \times (13 \times 17)$
(iii) $(24 \times 103) \times x = 24 \times (103 \times 9)$
(iv) $(33 \times 3) \times 13 = 33 \times (3 \times x)$
(v) $(45 \times 7) \times 4 = 45 \times (x \times 4)$
(vi) $(111 \times 3) \times 7 = x \times (3 \times 7)$

उदाहरण

निम्नलिखित गुणनफल, गुणन के नियमों पर आधारित लघुरीतियों से निकालिए :

(i) $(25 \times 37) \times 4 = (37 \times 25) \times 4$ ग क
$= 37 \times (25 \times 4)$ ग स
$= 37 \times 100 = 3700$

(ii) $125 \times (77 \times 8) = 125 \times (8 \times 77$ ग क
$= (125 \times 8) \times 77$ ग स
$= 1000 \times 77$
$= 77000$

प्रश्नावली

1. निम्नलिखित सत्य कथनों के प्रसंग में x कौन-सी संख्या है ? गुणन के क्रम-विनिमेय तथा साहचर्य-नियमों के प्रयोग के आधार पर अपने उत्तर का समर्थन कीजिए ।

(i) $(x \times 49) \times 37 = (49 \times 37) \times 27$
(ii) $(x \times 13) \times 17 = (13 \times 27) \times 17$
(iii) $(25 \times x) \times 4 = 25 \times (5 \times 4)$
(iv) $(23 \times x) \times 4 = (4 \times 23) \times 15$
(v) $(43 \times x) \times 5 = 43 \times (5 \times 13)$
(vi) $(x \times 5) \times 3 = (5 \times 3) \times 4$

2. निम्नलिखित को लघु-रीतियों द्वारा गुणा कीजिए ।

(i) $(2 \times 38) \times 5$ (ii) $(5773 \times 5) \times 20$
(iii) $(20 \times 84) \times 5$ (iv) $50 \times (80 \times 812)$
(v) $2 \times (12 \times 15)$ (vi) $15 \times (2 \times 13)$
(vii) $(4 \times 41) \times 15$ (viii) $(25 \times 33) \times 2$

संख्या एक का गुणन नियम—इस भाग के प्रारंभिक उदाहरण में वृक्षों की पंक्ति यदि एक होती तो वृक्षों की कुल संख्या पाँच होती । इस प्रकार $1 \times 5 = 5$ साथ ही एक पंक्ति के वृक्षों को एक-एक वृक्ष वाले पाँच स्तंभ मानने पर $5 \times 1 = 5$ यह संख्या 1 के उस गुणन नियम का एक विशेष उदाहरण है जिसके अनुसार

किसी धन-संख्या a के लिए

$$a \times 1 = a$$

संकेत ग ए इस नियम का सूचक होगा। इस नियम के कारण धन संख्या 1 को प्रायः गुणन-तत्समक अथवा गुणन-संबंधी निष्प्रभाव संख्या कहते हैं क्योंकि 1 से गुणा करने पर कोई संख्या नहीं बदलती।

टिप्पणी—योग-तत्समक अथवा योग-संबंधी निष्प्रभाव संख्या। धन-संख्याओं के समुच्चय में शून्य को न लेने के कारण हम यह नहीं कह सकते कि इस समुच्चय में योग-तत्समक अथवा योग-संबंधी निष्प्रभाव संख्या होती है।

वितरण-नियम—मान लीजिए कृष्णलाल और रामसिंह को किसी काम पर लगाया गया है। कृष्ण लाल को पाँच रुपए और रामसिंह को सात रुपए प्रतिदिन दिए जाएँगे। यदि दोनों आठ दिन काम करें तो हमें यह जानना है कि उनको कुल कितनी मजदूरी देनी होगी।

इस प्रश्न पर दो प्रकार से विचार हो सकता है। एक तो दोनों की एक-एक दिन की मजदूरी निकाल कर आठ दिन की कुल मजदूरी निकाल ली जाए और दूसरे दोनों की आठ दिन की अलग-अलग मजदूरी निकाल कर कुल मजदूरी निकाल ली जाय।

(i) दोनों की एक दिन की मजदूरी रुपयों में

$$= 5 + 7$$

दोनों की आठ दिन की कुल मजदूरी रुपयों में

$$= 8 \times (5 + 7)$$

(ii) कृष्ण लाल की आठ दिन की मजदूरी रुपयों में

$$= 8 \times 5$$

रामसिंह की आठ दिन की मजदूरी रुपयों में

$$= 8 \times 7$$

दोनों की आठ दिन की कुल मजदूरी रुपयों में

$$= 8 \times 5 + 8 \times 7$$

इस प्रकार

$$8 \times (5 + 7) = 8 \times 5 + 8 \times 7$$

धन संख्याओं

$$8,\ 5,\ 7$$

के स्थान पर यदि, कोई तीन धन-संख्याएँ

$$a,\ b,\ c$$

होतीं तो भी उपर्युक्त तर्कों में निहित विचार-शृंखला सत्य रहती।

अतः

वितरण-नियम

यह है कि

किन्हीं धन संख्याओं a, b, c के लिए

$$a\,(b + c) = ab + ac.$$

यह ध्यान देने योग्य है कि बाईं ओर तो हम योगफल $(b+c)$ को a से गुणा करते हैं और दाईं ओर b और c को अलग-अलग a से गुणा करते हैं। अतः हम कह सकते हैं कि योगफल वितरित हुआ।

इस प्रकार सार रूप में नियम यह हुआ कि गुणन योग को वितरित करता है, हम इसे केवल वितरण नियम कहते हैं। संकेत व इस नियम का सूचक होगा।

प्रश्नावली

1. धन संख्याओं के उस नियम का नाम बताइए जिसके आधार पर निम्नलिखित कथन सत्य हैं :

(i) $3\times(5+7) = 3\times5+3\times7$
(ii) $29\times(3+7) = 29\times3+29\times7$
(iii) $11\times(39+21) = 11\times39+11\times21$
(iv) $9\times(17+15) = 9\times17+9\times15$

2. कुछ ऐसे कथन दीजिए जो वितरण-नियम के आधार पर सत्य हैं।

3. निम्नलिखित प्रत्येक कथन सत्य है। प्रत्येक वर्ग में x कौन सी धन-संख्या है ?

(i) $x(5+11) = 13\times5+13\times11$
(ii) $5(x+7) = 5\times23+5\times7$
(iii) $9(3+x) = 9\times3+9\times27$
(iv) $23(17+13) = x\times17+x\times13$
(v) $29(41+49) = 29\times x+29\times49$
(vi) $25(51+9) = 25\times51+25\times x$

4. निम्नलिखित प्रत्येक कथन सत्य है। प्रत्येक वर्ग में धनसंख्या x बताइए। नियमों के प्रयोग के आधार पर अपने उत्तर का समर्थन कीजिए।

(i) $4+(x+5) = 5+(4+9)$
(ii) $5\times(3+x) = 5\times7+3\times5$
(iii) $x+39 = 39+27$
(iv) $13+(x+25) = (13+109)+25$
(v) $x(17+3) = (4\times17)+(4\times3)$
(vi) $(x+5)13 = (13\times5)+(15\times13)$
(vii) $(15+7)x = (22\times15)+(7\times22)$
(viii) $3(x+7) = (7\times3)+(9\times24)$
(ix) $x(9+3) = (4\times27)+(2\times18)$

उदाहरण—वितरण-नियम तथा अन्य नियमों पर आधारित लघु-रीतियों द्वारा निम्नलिखित को सरल कीजिए :

(*i*) $986 \times 693 + 693 \times 14$
(*ii*) $99 \times 99 + 99$
(*iii*) $18 \times 98 + 36$

हल

(*i*) $986 \times 693 + 693 \times 14$

$= 693 \times 986 + 693 \times 14$ ग क
$= 693 \times (986 + 14)$ व
$= 693 \times 1000$
$= 693000$

(*ii*) $99 \times 99 + 99$

$= 99 \times 99 + 99 + 4$ ग ए
$= 92 \times (99 + 1)$ व
$= 99 \times 100$
$= 9900$

(*iii*) $18 \times 98 + 36 = 18 \times 98 + 18 \times 2$

$= 18(98 + 2)$ व
$= 18 \times 100$
$= 1800$

प्रश्नावली

1. लघु-रीतियों से सरल कीजिए।

(*i*) $29 \times 54 + 46 \times 29$ (*ii*) $26 \times 37 + 37 \times 74$
(*iii*) $8 \times 37 + 69 \times 37 + 37 \times 3$ (*iv*) $43 \times 4 \times 5 \times 86 + 2 \times 129$
(*v*) $15 \times 19 + 3 \times 35$ (*vi*) $41 \times 8 + 123 \times 4$

2. योग और गुणन के विभिन्न नियमों के प्रयोग से निम्नलिखित को मन ही मन हल कीजिए :

(*i*) $(28 + 37) + 72$ (*ii*) $(25 + 27) + 25$
(*iii*) $(20 \times 67) \times 5$ (*iv*) $50 \times (37 \times 20)$
(*v*) $(23 \times 47) + 47 \times 177$ (*vi*) $(99 \times 137) + 137$
(*vii*) $(89 \times 99) + 89$ (*viii*) $36 + (28 + 124)$
(*ix*) $(87 \times 9) + (11 \times 87)$ (*x*) $(999 \times 999) + 999$
(*xi*) $(9999 \times 9999) + 9999$ (*xii*) $(9374 + 837) + (837 \times 626)$

3. घात, अपवर्त्य, करणी

कोई धन-संख्या लीजिए, जैसे 2/2, 2×2, $2\times2\times2$, $2\times2\times2\times2$,······, में से प्रत्येक व्यंजक दो का अपने ही साथ कई बार किए गए गुणन का फल है। विभिन्न व्यंजकों में संख्या 2 अलग-अलग बार आती है।

इन विभिन्न गुणनफलों को व्यक्त करने के लिए निम्नलिखित संकेत-पद्धति अपनाना सुविधाजनक है :

$$\left\{\begin{array}{ll} 2 & =2^1 \\ 2\times2 & =2^2 \\ 2\times2\times2 & =2^3 \\ 2\times2\times2\times2 & =2^4 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \end{array}\right.$$

व्यापक रूप में $\underbrace{2\times2\times2\times2\ldots\ldots\ldots\times2}_{m\text{-बार}}=2^m$

$2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5\ldots\ldots\ldots2^m\ldots\ldots$में से प्रत्येक को 2 का **घात** कहते हैं। विशेषत: 2^m को 2 का m-वाँ घात कहते हैं। m को इस घात का **घातांक** और 2 को इस घात का **आधार** कहते हैं।

इस प्रकार 2^4 को 2 का चौथा घात कहते हैं। चार इसका घातांक और 2 आधार है।

धन-संख्या 2 के स्थान पर कोई भी धन-संख्या ली जा सकती है।

इस प्रकार यदि हम

$$3^4=3\times3\times3\times3=81$$

का उदाहरण लें तो 81 को 3 का चौथा घात कह सकते हैं। इसी प्रकार

$$4^3=4\times4\times4=64$$

के उदाहरण में 64 को 4 का तीसरा घात कहेंगे।

परिभाषा—यदि a और m कोई दो धन-संख्याएँ हों तो

$$\underbrace{a\times a\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\times a}_{m\text{-बार}}=a^m$$

को a का m-वाँ घात कहते हैं जिसमें m इस घात का घातांक और a आधार है।

प्रश्नावली

निम्नलिखित का परिकलन कीजिए :

(i) 5^3	(ii) 6^2
(iii) 4^4	(iv) 7^3
(v) 5^4	(vi) 9^2

(*vii*) 10^4 (*viii*) 5 का दूसरा घात
(*ix*) 3 का छठा घात (*x*) 2 का आठवाँ घात
(*xi*) 20 का पाँचवाँ घात (*xii*) 6 का तीसरा घात

उदाहरण

सरल कीजिए :

(*i*) $2^3 \times 2^2$ (*ii*) $x^2\, y^4\, x$

हल

(*i*) $2^3 = 2 \times 2 \times 2$ तथा $2^2 = 2 \times 2$

$$\therefore \quad 2^3 \times 2^2 = (2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2)$$
$$= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$$
$$= 2^5.$$

(*ii*) $x^2y^4x = x^2(y^4x)$

$= x^2(xy^4)$ (y^4 को एक संख्या माना गया है)

$= (x^2x)y^4$

$= x^3y^4$. (x^3 की परिभाषा)

प्रश्नावली

1. x, y को कोई भी धन-संख्याएँ मानकर निम्नलिखित को सरल कीजिए :

(*i*) $7^2 \times 7^4$ (*ii*) x^2x^4
(*iii*) $x.x^3$ (*iv*) xyx^2
(*v*) yx^4y^5 (*vi*) $x.\ y.\ x^2y^3$
(*vii*) $x^2y^3x^7$ (*viii*) $5^3 \times 5^3$
(*ix*) $3^2 \times 3^4$ (*x*) 7×7^6
(*xi*) $5^2 \times 5^5$ (*xii*) $8^2 \times 8^2$

2. निम्नलिखित का परिकलन कीजिए :

(*i*) $2^2 \times 3^3$ (*ii*) $2^2 \times 3^3$
(*iii*) $5^3 \times 4^2$ (*iv*) $2^2 \times 10^3$

अपवर्त्य

कोई धनसंख्या a लीजिए ।

$$a,\ a+a,\ a+a+a,\ a+a+a+a, \ldots\ldots\ldots\ldots$$

में से प्रत्येक व्यंजक a का अपने ही साथ कई बार किए गए योग का फल है । गुणन की हमारी परिभाषा के अनुसार इनको इस प्रकार लिखा जा सकता है :

$$1a,\ 2a,\ 3a,\ 4a, \ldots\ldots\ldots\ldots$$

व्यापक रूप में

$$\underbrace{a+a+a+\cdots\cdots\cdots+a}_{m\text{-बार}}=ma$$

$1a, 2a, 3a, \cdots\cdots\cdots, ma, \cdots\cdots$ में से प्रत्येक को a का अपवर्त्य कहते हैं। अतः ma को a का अपवर्त्य कहते हैं। m और a धन-संख्या ma के खंड भी कहलाते हैं। निम्नलिखित में पाठक सरलता से देख सकता है कि घात और अपवर्त्य की धारणाओं का व्यवहार किस प्रकार समान है।

अपवर्त्य	घात
$a=1a$	$a=a^1$
$a+a=2a$	$a\times a=a^2$
$a+a+a=3a$	$a\times a\times a=a^3$
$a+a+a+a=4a$	$a\times a\times a\times a=a^4$
$\underbrace{a+a+a+\cdots\cdots+a}_{m\text{-बार}}=ma$	$\underbrace{a\times a\times a\cdots\cdots\times a}_{m\text{-बार}}=a^m$
$2a+3a=a+a+a+a+a$	$a^2\times a^3=a\times a\times a\times a\times a$
$=5a=(2+3)a$	$=a^5=a^{2+3}.$

उदाहरण

$2a+7b+3a$ को सरल कीजिए।

हल

$2a+7b+3a$

$=2a+(7b+3a)$	य स
$=2a+(3a+7b)$	य क
$=(2a+3a)+7b$	य स
$=(a.2+a.3)+7b$	ग क
$=a(2+3)+7b$	व
$=5a+7b$	ग क

प्रश्नावली

a, b, x, y, z सभी को धन-संख्याएँ मानकर निम्नलिखित को सरल कीजिए।

(i) $5a+7a$ (ii) $a+3a+2a$

(iii) $5a+3b+a$ (iv) $2a+4b+a+3b$

(v) $3b+2a+a+5b$ (vi) $x+y+z+x.$

करणी

हमने देख लिया है कि धन-संख्या a का n-वाँ घात भी एक धन-संख्या है। यदि इस घात को b लिखें तो

$$a^n = b.$$

इसमें a, b, n सभी धन-संख्याएँ हैं।

इस कथन को ऐसे भी लिखते हैं

$$a = \sqrt[n]{b}$$

और हम कह सकते हैं कि

यदि a का n-वाँ घात b हो

तो b का n-वाँ मूल a होगा।

व्यंजक

$$\sqrt[n]{b}$$

को करणी भी कहते हैं।

उदाहरणार्थ

$\sqrt[2]{4}$ क्योंकि $2^2 = 4$

$\sqrt[3]{27}$ क्योंकि $3^3 = 27$

$\sqrt[4]{10000} = 10$ क्योंकि $10^4 = 10000$

किसी संख्या के 2-वें मूल को उसका वर्गमूल कहने की प्रथा भी है। a के 2-वें मूल $\sqrt[2]{a}$ को प्रतीक 2 के बिना सीधा $\sqrt{a}$ भी लिखा जाता है। अतः $\sqrt{a}$ धन-संख्या a के वर्गमूल का सूचक है।

प्रश्नावली

निम्नलिखित करणियों को परख कर सरल कीजिए।

(i) $\sqrt[3]{8}$ (ii) $\sqrt[5]{32}$

(iii) $\sqrt{81}$ (iv) $\sqrt[3]{64}$

(v) $\sqrt[6]{64}$ (vi) $\sqrt[4]{256}$

(vii) $\sqrt[3]{125}$ (viii) $\sqrt{36}$

(ix) $\sqrt{16}$ (x) $\sqrt[3]{216}$

किसी धन-संख्या का प्रत्येक घात धन-संख्या ही होती है किन्तु यह अनिवार्य नहीं कि प्रत्येक धन-संख्या किसी धन-संख्या का घात हो। इस प्रकार किसी धन-संख्या का n-वाँ मूल सदा सार्थक नहीं होता। उदाहरण के लिए संख्या 2 किसी भी धन-संख्या का 2-वाँ घात नहीं है। अतः धन-संख्या के समुच्चय के प्रसंग में हम संख्या 2 के वर्गमूल की बात नहीं कर सकते।

प्रश्नावली

1. निम्नलिखित में से कौन-सी संख्याएँ धन-संख्याओं के वर्ग हैं ? जहाँ संभव हो, वर्ग-मूल निकालिए ।

(*i*) 1 (*ii*) 4 (*iii*) 7
(*iv*) 9 (*v*) 12 (*vi*) 16
(*vii*) 36 (*viii*) 48 (*ix*) 49
(*x*) 121.

2. निम्नलिखित में से कौन-सी संख्याएँ धन-संख्याओं के घन हैं ? जहाँ संभव हो, घन-मूल निकालिए ।

(*i*) 8 (*ii*) 16 (*iii*) 32
(*iv*) 27 (*v*) 48.

3. निम्नलिलित में से कौन-सी संख्याएँ धन-संख्याओं के चौथे घात हैं ? जहाँ संभव हो, चौथे मूल निकालिए ।

(*i*) 16 (*ii*) 32 (*iii*) 64
(*iv*) 81 (*v*) 625.

[उद्देशक— 1. (*x*) 11 का वर्ग 121 है ।

अर्थात् $11^2=121$

$\therefore \quad \sqrt{121}=11.$

2. (*iii*) 32 किसी भी धन-संख्या का घन नहीं है । अतः व्यंजक $\sqrt[3]{32}$ धन-संख्याओं के समुच्चय के प्रसंग में निरर्थक है ।

3. (*iv*) 81 संख्या 3 का चौथा घात है । अतः $3^4=81$.

$\therefore \quad \sqrt[4]{81}=3.$]

4. निम्नलिखित में a, b, c धन-संख्याएँ हैं । सरल कीजिए :

(*i*) $\sqrt{a^2}$ (*ii*) $\sqrt{a^2b^2}$
(*iii*) $\sqrt{a^4b^4}$ (*iv*) $\sqrt[3]{b^3}$
(*v*) $\sqrt[3]{a^6b^3}$ (*vi*) $\sqrt[3]{8a^3}$
(*vii*) $\sqrt{a^4}$ (*viii*) $\sqrt{16a^4b^4}$
(*ix*) $\sqrt{81b^8c^{12}}$

वितरण नियम का महत्त्व

वितरण नियम अर्थात्

$$a(b+c)=ab+ac$$

के दो कार्य हैं ।

एक तो यह गुणनफल $a(b+c)$ को योगफल $ab+ac$ के रूप में व्यक्त करता है।

दूसरे विलोमतः इसे योगफल $ab+ac$ को गुणनफल के रूप में व्यक्त करने वाला समझा जा सकता है। वितरण नियम के इन दोनों कार्यों को निम्नलिखित उदाहरणों तथा प्रश्नावलियों द्वारा समझाया जाएगा। यह स्मरणीय है कि किसी भी योगफल को गुणनफल के रूप में व्यक्त करने के लिए हमें योगफल बनाने वाले प्रत्येक पद में विद्यमान खंड को खोजना पड़ता है। उदाहरणार्थ, व्यंजक

$$ax+bx+cx$$

में x योगफल के तीनों पदों में विद्यमान है। अतः

$$\begin{aligned} ax+bx+cx &= (ax+bx)+cx \\ &= (a+b)x+cx \\ &= [(a+b)+c]x \\ &= (a+b+c)x \\ &= x(a+b+c). \end{aligned}$$

उदाहरण

1. सिद्ध कीजिए कि सभी धन-संख्याओं a, b, c, d के लिए

$$[(a+b)+c]+d=[(d+b)+a]+c.$$

उपपत्ति—हम देखते हैं कि

$$\begin{aligned} [(a+b)+c]+d &= (a+b)+(c+d) && \text{य स} \\ &= (a+b)+(d+c) && \text{य क} \\ &= [(a+b)+d]+c && \text{य स} \\ &= [a+(b+d)]+c && \text{य स} \\ &= [a+(d+b)]+c && \text{य क} \\ &= [(d+b)+a]+c. && \text{य क} \end{aligned}$$

2. सिद्ध कीजिए कि सभी धन-संख्याओं a, b, c के लिए

$$(a+b)c=ac+bc.$$

उपपत्ति—हम देखते हैं कि

$$\begin{aligned} (a+b)c &= c(a+b) && \text{ग क} \\ &= ca+cb && \text{ब} \\ &= ac+bc. && \text{ग क} \end{aligned}$$

3. सिद्ध कीजिए कि सभी धन-संख्याओं a, b, c, d के लिए

$$a(b+c+d)=ab+ac+ad.$$

उपपत्ति—हम देखते हैं कि

$$a(b+c+d)=a[(b+c)+d] \quad \text{य स}$$
$$=a(b+c)+ad \quad \text{व}$$
$$=(ab+ac)+ad \quad \text{व}$$
$$=ab+ac+ad. \quad \text{य स}$$

4. सिद्ध कीजिए कि सभी धन-संख्याओं a, b, c, d के लिए

$$(a+b)\ (c+d)=ac+ad+bc+bd.$$

उपपत्ति—$(c+d)$ को एक संख्या मानकर उपर्युक्त उदाहरण 2 के फल का प्रयोग करने पर हम देखते हैं कि

$$(a+b)\ (c+d)=a(c+d)+b(c+d)$$
$$=(ac+ad)+(bc+bd) \quad \text{व}$$
$$=ac+ad+bc+bd. \quad \text{य स}$$

5. a और b कोई धन-संख्याएँ हों तो सिद्ध कीजिए कि

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2.$$

उपपत्ति—हम देखते हैं कि

$$(a+b)^2=(a+b)\ (a+b) \quad \text{परिभाषा}$$
$$=(a+b)a+(a+b)b \quad \text{व}$$
$$=a(a+b)+b(a+b) \quad \text{ग क}$$
$$=(a.a+a.b)+(b.a+b.b) \quad \text{व}$$
$$=(a^2+ab)+(ba+b^2)$$
$$=(a^2+ab)+(ab+b^2) \quad \text{ग क}$$
$$=[(a^2+ab)+ab]+b^2 \quad \text{य स}$$
$$=[a^2+(ab+ab)]+b^2 \quad \text{य स}$$
$$=(a^2+2ab)+b^2 \quad \text{परिभाषा}$$
$$=a^2+2ab+b^2. \quad \text{य स}$$

टिप्पणी—उपर्युक्त प्रत्येक उदाहरण में हमने प्रत्येक चरण का समर्थन मूल नियमों के आधार पर करने का प्रयत्न किया है। इस समर्थन से एक बार परिचित हो जाने पर पाठक को चाहिए कि वह प्रयुक्त नियमों का मन ही मन ध्यान करके अंतिम फल पर पहुँच जाए। अभ्यास हो जाने पर वह कुछ चरणों को छोड़ भी सकता है।

प्रश्नावली

1. सभी धन-संख्याओं a, b, c, d के लिए सिद्ध कीजिए कि

(i) $(a+b)+(c+d) = (a+c)+(d+b)$

(ii) $(a+b)+(c+d) = (b+c)+(d+a)$

(iii) $(2a+3b)+(5a+4b) = 7(a+b)$

(iv) $(11a+13b)+(a+4b) = 12a+17b.$

2. यदि a, b, c, d, x, y कोई धन-संख्याएँ हो तो सिद्ध कीजिए कि

(i) $x(a+b+c) = ax+bx+cx$

(ii) $(a+b+c)d = ad+bd+cd$

(iii) $(2a+5b)(4x+3y) = 8ax+20bx+6ay+15by.$

3. यदि a, b, c, x, y, z कोई धन-संख्याएँ हों तो सिद्ध कीजिए कि

(i) $(x+2)(x+3) = x^2+5x+6$

(ii) $(x+a)(x+b) = x^2+(a+b)x+ab$

(iii) $(3x+1)(2x+5) = 6x^2+17x+5$

(iv) $(x+5y)(x+8y) = x^2+13xy+40y^2$

(v) $(2x+3y)(7x+10y) = 14x^2+41xy+30y^2$

(vi) $(x+1)(x+2)(x+3) = x^3+6x^2+11x+6$

(vii) $(x+1)^3 = x^3+3x^2+3x+1$

(viii) $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

(ix) $x(x^2+3) = x^3+3x$

(x) $(x+2)(2x^2+5) = 2x^3+4x^2+5x+10$

(xi) $y^2(xy+x^2) = x^2y^2+xy^3$

(xii) $x(y+zx+x^3) = xy+x^2z+x^4$

(xiii) $(a+b)(x+y+z) = ax+bx+ay+by+az+bz.$

उदाहरण—यदि a, b, c, x, y सभी धन-संख्याएँ हों तो

निम्नलिखित योगफलों को गुणनफलों के रूप में व्यक्त कीजिए।

(i) $ax+bx$

(ii) $ax+bx+cx$

(iii) x^2y+xy_z

(iv) $ax+bx+(a+b)y.$

हल

(i) $ax+bx=xa+xb$ ग क

$=x(a+b).$ व

(ii) $ax+bx+cx=xa+xb+xc$ ग क

$=(xa+xb)+xc$ य स

$=x(a+b)+xc$ व

$=x[(a+b)+c]$ व

$=x(a+b+c).$ य स

(iii) $x^2y+xy^2=(x.x)y+x(y.y)$

$=x(xy)+(xy)y$ ग स

$=(xy)x+(xy)y$ ग क

$=xy(x+y).$ व

(iv) $ax+bx+(a+b)y=xa+xb+(a+b)y$ ग क

$=x(a+b)+(a+b)y$ व

$=(a+b)x+(a+b)y$ ग क

$=(a+b)(x+y).$ व

प्रश्नावली

वितरण नियम एवं अन्य नियमों का प्रयोग करके निम्नलिखित योगफलों को गुणनफलों के रूप में व्यक्त कीजिए।

(i)	$3x+3y$	(ii)	$ax+ya$
(iii)	$2xy+2xz$	(iv)	$3xy+6xz$
(v)	$4xy+5xz$	(vi)	$2(a+b)x+3(a+b)y$
(vii)	$8y+6xy$	(viii)	a^2+2a
(ix)	x^3+x^2	(x)	$3x^2y+5xy^2$
(xi)	$3x+3y+3z$	(xii)	$3ax+6by+9c$
(xiii)	$xyz+x^2y+x^2z$	(xiv)	$3x+3y+5(x+y)$
(xv)	$2x+6y+3a(x+3y)$	(xvi)	$2ax+5ay+b(2x+5y)$
(xvii)	$ax+by+ay+bx$	(xviii)	$6xy+8x+9y+12$
(xix)	$4ab+16a+b+4$	(xx)	$xy+x+y+1$
(xxi)	$2u+2v+uv+4$	(xxii)	$ax+ay+xy+a^2$

4. क्रम संबंध

धन-संख्याओं के समुच्चय में योग और गुणन संयोजनों के अतिरिक्त क्रम संबंध भी होता है। इस क्रम संबंध को हम

'अधिक है······से'

संबंध कहेंगे और प्रतीक रूप में

$$'>'$$

लिखेंगे ।

किन्हीं भी दो धन-संख्याओं a, b के युग्म के साथ योग और गुणन संयोजन क्रमशः धन-संख्याओं $a+b$, ab का संबंध जोड़ते हैं परंतु '$>$' से सूचित क्रम संबंध के आधार पर किन्हीं दो भिन्न-भिन्न धन-संख्याओं a, b का संबंध

$$a>b \text{ अथवा } b>a$$

होगा ।

नीचे हम क्रम संबंध के कुछ मूल नियमों का विचार करेंगे ।

धन-संख्या 1 से प्रारंभ करके उत्तरोत्तर 1 जोड़ कर हम कोई भी धन-संख्या प्राप्त कर सकते हैं । इस प्रकार

$$2=1+1,\ 3=2+1,\ 4=3+1,\ 5=4+1, \cdots\cdots\cdots$$

हम कहते हैं कि प्रत्येक अवस्था की संख्या पूर्व अवस्थाओं की संख्याओं से अधिक है । उदाहरण के लिए

(*i*) 2 अधिक है 1 से अथवा $2>1$
(*ii*) 4 अधिक है 2 से अथवा $4>2$
(*iii*) 11 अधिक है 6 से अथवा $11>6$

व्यापक रूप में, यदि धन-संख्या a अधिक हो धन-संख्या b से तो इस कथन का प्रतीक

$$a>b$$

होगा ।

यदि हम किन्हीं दो विभिन्न संख्याओं, जैसे 12 और 17, से प्रारंभ करें तो 12 में उत्तरोत्तर पाँच बार 1 जोड़ने से 17 प्राप्त किया जा सकता है । दूसरे शब्दों में

$$17=12+1+1+1+1+1.$$

इस प्रकार 17 अधिक है 12 से अर्थात् $17>12$. निश्चय ही 12 अधिक नहीं है 17 से । अतः हम देखते हैं कि यदि a और b कोई दो विभिन्न धन-संख्याएँ हों तो

$$a>b \text{ अथवा } b>a.$$

इस प्रकार हम **त्रिविकल्प नियम** पर पहुँच जाते हैं । इस नियम के अनुसार किन्हीं दो धन-संख्याओं a और b के लिए निम्नलिखित तीन विकल्पों में से एक और केवल एक ही होगा ।

(*i*) $a=b$ (*ii*) $a>b$ (*iii*) $b>a.$

अब हम देखेंगे कि किस प्रकार 'अधिक है······से' संबंध को योग संयोजन द्वारा प्रस्तुत किया जा सकता है ।

$13 > 10$ और 10 में उत्तरोत्तर तीन बार 1 जोड़ने से 13 प्राप्त किया जा सकता है। इसलिए

$$13 = 10 + 1 + 1 + 1.$$

इसको

$$13 = 10 + 3.$$

भी लिखा जा सकता है।

अत: $13 > 10$ का अर्थ यह हुआ कि 3 एक ऐसी धन-संख्या है जिसके लिए

$$13 = 10 + 3.$$

व्यापक रूप में, यदि $a > b$ तो d एक ऐसी धन-संख्या होगी जिसके लिए $a = b + d$.

उदाहरण के लिए यदि $a = 7$, $b = 4$ हो और $7 > 4$ तो $d = 3$

यदि $a = 18$, $b = 12$ और $18 > 12$ तो $d = 6$. विलोमत:, यदि a, b, d ऐसी धन-संख्याएँ हों जिसके लिए

$$a = b + d$$

तो b में उत्तरोत्तर d-बार 1 को जोड़ने से a को प्राप्त किया जा सकता है। इसलिए

$$a > b.$$

अत: दोनों को मिलाने से $a > b$ तब और तभी होगा जब d एक ऐसी धन-संख्या हो जिसके लिए

$$a = b + d.$$

टिप्पणी

यह ध्यान देने योग्य है कि यदि

$$a = b + d$$

तो $a > d$ क्योंकि संख्या में उत्तरोत्तर b-बार 1 जोड़ने से संख्या a को प्राप्त किया जा सकता है। अत: जब

$$a = b + d$$

तो

$$a > b \text{ और } a > d.$$

उदाहरणार्थ

$$23 = 14 + 9$$

का यह अर्थ हुआ कि

$$23 > 14 \text{ और } 23 > 9.$$

उदाहरण *1*.

$$47 > 35$$

क्योंकि $47 = 35 + 12$.

उदाहरण *2*.

$$23 = 19 + 4$$

का अर्थ है कि $23 > 19$.

प्रश्नावली

1. निम्नलिखित कथनों के कारण बताइए।

(*i*) $13>77$	(*ii*) $25>12$
(*iii*) $37>33$	(*iv*) $50>17$
(*v*) $16>14$	(*vi*) $19>16$.

2. निम्नलिखित कथनों को प्रतीक रूप में व्यक्त कीजिए।

(*i*) 12 अधिक है 11 से।	(*ii*) 15 अधिक है 6 से।
(*iii*) 24 अधिक है 21 से।	(*iv*) 37 अधिक है 12 से।

3. निम्नलिखित में से कौन-से कथन सत्य और कौन-से मिथ्या हैं?

(*i*) 5 अधिक है 7 से।	(*ii*) 12 अधिक है 3 से।
(*iii*) 31 अधिक है 35 से।	(*iv*) 3 अधिक है 3 से।
(*v*) 11 अधिक है 8 से।	(*vi*) 13 अधिक है 14 से।
(*vii*) 25 अधिक है 21 से।	(*viii*) 29 अधिक है 29 से।
(*ix*) $7>9$	(*x*) $12>4$
(*xi*) $28>28$	(*xii*) $16>15$
(*xiii*) $41>41$	(*xiv*) $48>47$
(*xv*) $48>49$	(*xvi*) $37>1$
(*xvii*) $50>50$	(*xviii*) $103>127$.
(*xix*) $256>204$	(*xx*) $1>1$.

4. उपर्युक्त प्रश्न 3 में दो संख्याओं से संबद्ध मिथ्या कथनों के स्थान पर सत्य कथन दीजिए। उदाहरण के लिए वर्ग (*iii*) में सत्य कथन यह होगा कि 35 अधिक है 31 से।

क्रम संबंध के मूल नियम—

क्रम संबंध '$>$' के त्रिविकल्प नियम के अतिरिक्त नीचे इस संबंध के कुछ अन्य मूल नियमों का हम विचार करेंगे।

क्रम संबंध की संक्रामकता—

मान लीजिए कि 9वीं, 10वीं अथवा 11वीं कक्षा में होने के नाते एक विद्यार्थी को प्रतिमास क्रमशः 7 रु०, 9 रु० अथवा 12 रु० शिक्षण-शुल्क देना पड़ता है। हम जानते हैं कि

$$9>7 \text{ और } 12>9.$$

इसलिए 10वीं कक्षा का विद्यार्थी अधिक शुल्क देता है 9वीं कक्षा के विद्यार्थी से और 11वीं कक्षा का विद्यार्थी अधिक शुल्क देता है 10वीं कक्षा के विद्यार्थी से। निश्चय ही 11वीं कक्षा का विद्यार्थी अधिक शुल्क देता है 9वीं कक्षा के विद्यार्थी से, क्योंकि $12>7$.

इस स्थिति का वर्णन इस प्रकार किया जा सकता है:

क्योंकि $12>9$ और $9>7$

इसलिए $12 > 7$.

ठीक इसी प्रकार

क्योंकि $13 > 8$ और $8 > 3$

इसलिए $13 > 3$.

ये क्रम संबंध की संक्रामकता के विशेष उदाहरण हैं, जिसके अनुसार

यदि $a > b$ और $b > c$

तो $a > c$.

संबंध '>' के इस नियम को सरलता पूर्वक इस प्रकार समझा जा सकता है।

यदि $a > b$,

तो d एक ऐसी धन-संख्या होगी जिसके लिए

$$a = b + d. \qquad (1)$$

पुनः, क्योंकि $b > c$

इसलिए e एक ऐसी धन-संख्या होगी जिसके लिए

$$b = c + e. \qquad (2)$$

(1) और (2) के फलस्वरूप

$$a = (c + e) + d$$

$$\therefore \quad a = c + (e + d) \qquad \text{य स}$$

इसलिए $(e + d)$ एक ऐसी धन-संख्या है जिसके लिए

$$a = c + (e + d).$$

अतः $a > c$.

क्रम संबंध का योग संयोजन के साथ संबंध

पिछले भाग के उदाहरण में यदि हम यह मान लें कि पुस्तकालय, भवन और अन्य शुल्क के रूप में विद्यालय के प्रत्येक छात्र को 2 रु० प्रतिमास देने पड़ते हैं तो 10वीं कक्षा के विद्यार्थी $(9 + 2)$ रु० और 9वीं कक्षा के विद्यार्थी को $(7 + 2)$ रु० प्रतिमास देने होंगे। निश्चय ही 10वीं कक्षा का विद्यार्थी अधिक शुल्क देता है 9वीं कक्षा के विद्यार्थी से, क्योंकि

$$9 + 2 > 7 + 2.$$

इस प्रकार, यदि $9 > 7$ तो $9 + 2 > 7 + 2$.

ठीक इसी प्रकार, यदि $12 > 9$ तो $12 + 2 > 9 + 2$.

व्यापक रूप में

यदि $a > b$

और c कोई धन-संख्या हो, तो

$$a + c > b + c.$$

दूसरे शब्दों में हम यह कह सकते हैं कि दो धन-संख्याओं से संबद्ध एक सत्य क्रम-कथन प्रतीक '>' के दोनों ओर एक ही धन-संख्या जोड़ने पर भी सत्य रहता है।

इस नियम को यह कह कर भी व्यक्त करते हैं कि योग संयोजन और क्रम-संबंध संगत हैं।

यदि $a>b$ तो d एक ऐसी धन-संख्या होगी जिसके लिए

$$a=b+d$$

$\therefore$ $$a+c=(b+d)+c$$

$\therefore$ $$a+c=(b+c)+d$$ ग स और य क

और इसलिए $$a+c>b+c$$

अतः नियम इस प्रकार हैं :

योग संयोजन और क्रम-संबंध की संगति--किन्हीं धन-संख्याओं a, b, c के लिए

यदि $a>b$ तो $a+c>b+c$

नीचे हम ऐसे दो महत्त्वपूर्ण परिणामों को सिद्ध करेंगे जो समीकरणों और असमताओं के हलों के प्रसंग में बहुधा प्रयुक्त होंगे।

योग का अपवर्तन नियम--इस नियम के अनुसार,

किन्हीं धन-संख्याओं a, b, c के लिए

यदि $a+c=b+c$ तो $a=b$

उपपत्ति--त्रिविकल्प नियम के अनुसार निम्नलिखित तीन विकल्पों में से एक और केवल एक ही होगा।

(i) $a>b$ (ii) $b>a$ (iii) $a=b$

हम यह सिद्ध करेंगे कि विकल्प (i) और (ii) परिकल्पना

$$a+c=b+c$$

का विरोध करेंगे।

(i) यदि $a>b$ तो $a+c>b+c$

(ii) यदि $b>a$ तो $b+c>a+c$

किन्तु यह दिया हुआ है कि $a+c=b+c$. इसलिए न तो

$a+c>b+c$ और न $b+c>a+c$

$\therefore$ $a=b$ अनिवार्य है।

प्रमेय--किन्हीं धन-संख्याओं a, b, c के लिए यदि $a+c>b+c$ तो $a>b$.

उपपत्ति--त्रिविकल्प नियम के अनुसार निम्नलिखित तीनों विकल्पों में से एक और केवल एक ही होगा।

(i) $a>b$ (ii) $b>a$ (iii) $a=b$.

हम देखेंगे कि विकल्प (ii) और (iii) परिकल्पना

$$a+c>b+c$$

का विरोध करेंगे।

(i) यदि $b>a$ तो $b+c>a+c$.
(ii) यदि $a=b$ तो $a+c=b+c$.

किन्तु यह दिया हुआ है कि $a+c>b+c$. इसलिए न तो

$b+c>a+c$ और न $a+c=b+c$.

$\therefore$ $a>b$ अनिवार्य है।

योग और '>' के संबंध के अध्ययन से निम्नलिखित मूल परिणाम प्राप्त होते हैं।

(i) समता का कोई सत्य कथन प्रतीक '=' के दोनों ओर योज्य के रूप में आने वाली एक ही धन-संख्या को काटने पर भी सत्य रहता है।

उदाहरणार्थ

यदि $x+5=11$ तो $x=6$

क्योंकि हम 11 को $6+5$ भी लिख सकते हैं।

टिप्पणी—यह भी ठीक है कि

यदि $x=6$ तो $x+5=6+5=11$

(ii) संबंध '>' का कोई सत्य कथन प्रतीक के दोनों ओर एक ही धन-संख्या को जोड़ने पर अथवा योज्य के रूप में आने वाली एक ही धन-संख्या को काटने पर भी सत्य रहता है। उदाहरण के लिए,

यदि $(2x+7)>(x+9)$ तो $x>2$.

दिया हुआ है कि

$$(2x+7) > (x+9)$$
$$\therefore \quad x+(x+7) > (x+7)+2$$
$$\therefore \quad x+(x+7) > 2+(x+7)$$

$(x+7)$ को दोनों ओर से काटने पर

$$x > 2$$

प्राप्त होता है।

विलोमतः यदि $x>2$ तो $2x+7>x+9$.
अब, यदि $x>2$ तो $x+7>2+7=9$.
और इसलिए $x+(x+7)>x+9$.
फलतः $2x+7>x+9$.

प्रश्नावली

x कोई धन-संख्या है। सिद्ध कीजिए कि

(i)	यदि	$7x+23=2x+88$	तो	$5x=15$
(ii)	यदि	$2x=1$	तो	$7x+9=5(x+2)$
(iii)	यदि	$x+3>14$	तो	$x>11$
(iv)	यदि	$x>3$	तो	$4x+5>3x+8$
(v)	यदि	$5x+3>2x+5$	तो	$3x>2.$

क्रम संबंध का गुणन संयोजन के साथ संबंध—योग संयोजन और क्रम संबंध की संगति के नियम के ठीक समान गुणन संयोजन और क्रम संबंध की संगति का नियम भी है।

मान लीजिए कि जिन 10वीं और 11वीं कक्षाओं का विचार हम कर रहे थे उनमें से प्रत्येक में 36 विद्यार्थी हैं। तब दोनों कक्षाओं के विद्यार्थियों का कुल शिक्षण-शुल्क क्रमशः 9×36 और 12×36 रुपए होगा। 11वीं कक्षा का कुल शिक्षण-शुल्क अधिक होगा 10वीं कक्षा के कुल शिक्षण-शुल्क से। इसलिए

यदि $12 > 9$ तो $12\times36>9\times36.$

ठीक इसी प्रकार यदि 9वीं कक्षा में भी 36 विद्यार्थी होते तो परिणाम यह होता :

क्योंकि $9 > 7$ इसलिए $9\times36>7\times36.$

व्यापक रूप में, हम देखते हैं कि

यदि $a > b$ और c कोई धन-संख्या हो तो

$$ac > bc.$$

हम कहते हैं कि गुणन संयोजन और क्रम संबंध संगत हैं। हम इसको इस प्रकार भी देख सकते हैं :

मान लीजिए कि $a > b.$

d एक ऐसी धन-संख्या होगी जिसके लिए

$$a=b+d$$

$\therefore$ $$ac=(b+d)c$$

अर्थात् $$ab=bc+dc$$

$\therefore$ $$ac > bc.$$

अतः नियम इस प्रकार है :

गुणन संयोजन और क्रम संबंध की संगति—किन्हीं धन-संख्याओं a, b, c के लिए

यदि $a > b$ तो $ac > bc.$

गुणन का अपवर्तन नियम—योग के अपवर्तन नियम के ठीक समान गुणन का अपवर्तन नियम भी है। इसके अनुसार

सभी धन-संख्याओं a, b, c के लिए

यदि $ac=bc$ तो $a=b.$

इसकी सत्यता निम्नलिखित रूप में देखी जा सकती है :

नीचे लिखे तीन विकल्पों में से एक और केवल एक ही होगा।

(i) $a>b$ (ii) $b>a$ (iii) $a=b$.

विकल्प (i) के फलस्वरूप $ac > bc$.

विकल्प (ii) के फलस्वरूप $bc > ac$.

किन्तु न तो $ac>bc$ और न $bc>ac$, क्योंकि यह दिया हुआ है कि

$$ac=bc.$$

$\therefore$ $a=b$ अनिवार्य है।

प्रमेय—a, b, c कुछ भी धन-संख्याएँ हों तो सिद्ध कीजिए कि

यदि $ac > bc$ तो $a > b$.

उपपत्ति—नीचे लिखे तीन विकल्पों में से एक और केवल एक ही होगा।

(i) $a>b$ (ii) $b>a$ (iii) $a=b$

विकल्प (ii) के फलस्वरूप $bc>ac$.

विकल्प (iii) के फलस्वरूप $ac=bc$.

किन्तु न तो $bc>ac$ और न $ac=bc$.

$\therefore$ $a>b$ अनिवार्य है।

गुणन और '$>$' के संबंध के अध्ययन से मूल महत्त्व के निम्नलिखित परिणाम प्राप्त होते हैं।

(i) समता का कोई सत्य कथन प्रतीक '$=$' के दोनों ओर खंड के रूप में आने वाली एक ही धन-संख्या को काटने पर भी सत्य रहता है।

उदाहरणार्थ

यदि $2x=18$ तो $x=9$

क्योंकि हम 18 को 2×9 भी लिख सकते हैं।

टिप्पणी—यह भी ठीक है कि

यदि $x=9$ तो $x.2=9.2$ अर्थात् $2x=18$.

(ii) संबंध '$>$' का कोई सत्य कथन प्रतीक के दोनों पक्षों को एक ही धन-संख्या से गुणन करने पर अथवा खंड के रूप में आने वाली एक ही धन-संख्या को काटने पर भी सत्य रहता है।

उदाहरणार्थ

यदि $3x>21$ तो $x>7$

क्योंकि हम 21 को 3×7 भी लिख सकते हैं।

विलोमतः यदि $x>7$

तो $3x>3\times7$

अर्थात् $3x>21$.

प्रश्नावली

x कोई धन-संख्या है। सिद्ध कीजिए कि

(i)	यदि $x+3=7$	तो	$x^2+3x=7x$
(ii)	यदि $2x+5=x+11$	तो	$6x+15=3x+33$
(iii)	यदि $2x+1>x+4$	तो	$6x+3>3x+12$
(iv)	यदि $x>5$	तो	$x^2>5x$
(v)	यदि $x^3>x^2+3x$	तो	$x^2>x+3$

उदाहरण

1. किसी धन-संख्या x के लिए सिद्ध कीजिए कि

यदि $3x+5=x+17$ तो $x=6$.

हल

$$3x+5=x+17.$$

17 को $12+5$ लिख कर और य स का प्रयोग करने से

$$3x+5=(x+12)+5.$$

योज्य 5 को दोनों ओर से काटने पर (i)

$$3x=x+12.$$

पुनः $3x=x+2x$ और इसलिए (i) के फलस्वरूप

$$x+2x=x+12.$$

योज्य x को दोनों ओर से काटने पर

$$2x=12.$$

खंड 2 को दोनों ओर से काटने पर

$$x=6.$$

2. किन्हीं धन-संख्याओं a और b के लिए, सिद्ध कीजिए कि

यदि $a>b$ तो $a^2>b^2$.

हल $a>b$

$\therefore \quad a.a>a.b$ अर्थात् $a^2>ab$ (1)

पुनः $a>b$

$a.b>b.b$ अर्थात् $ab>b^2$ (2)

संबंध '>' के संक्रामक नियम का प्रयोग करने पर हम (1) और (2) से

$$a^2>b^2$$

प्राप्त करते हैं।

3. किन्हीं धन-संख्याओं a, b, c, d के लिए, सिद्ध कीजिए कि

यदि $a>b$ और $c>d$ तो $a+c>b+d$.

हल $a > b$

$\therefore \quad a+c > b+c \qquad (i)$

पुन: $c > d$

$\therefore \quad b+c > b+d \qquad (ii)$

(i) और (ii) के फलस्वरूप

$a+c > b+d.$

वैकल्पिक हल

p और q ऐसी धन-संख्याएँ हैं जिनके लिए

$$a = b+p \qquad (i)$$
$$c = d+q \qquad (ii)$$

(i) और (ii) के फलस्वरूप

$$a+c = (b+p)+(d+q)$$
$$= (b+d)+(p+q) \qquad \text{य क, य स}$$
$$\therefore \quad a+c > b+d.$$

प्रश्नावली

1. x कोई धन-संख्या है। सिद्ध कीजिए कि

(i)	यदि	$4x+1=13$	तो	$x=3$
(ii)	यदि	$x=3$	तो	$4x+1=13$
(iii)	यदि	$4x+1>17$	तो	$x>4$
(iv)	यदि	$x>4$	तो	$4x+1>17$
(v)	यदि	$17>4x+1$	तो	$4>x$
(vi)	यदि	$4>x$	तो	$17>4x+1.$

2. यदि a, b, c, d ऐसी धन-संख्याएँ हों, जिनके लिए

$a>b$ और $c>d$

तो $ab>bd.$

3. किन्हीं धन-संख्याओं a, b के लिए सिद्ध कीजिए कि

यदि $a>b$ तो $a^3>b^3.$

4. a और b कोई धन-संख्याएँ हैं। सिद्ध कीजिए कि

(i)	यदि	$a>2$	तो	$(5a+3b)+14>3(b+8)$
(ii)	यदि	$(5a+3b)+14>3(b+8)$	तो	$a>2$
(iii)	यदि	$a>11$	तो	$a^2+3a+7>7(2a+1)$
(iv)	यदि	$a^2+3a+7>7(2a+1)$	तो	$a>11.$

अभ्युक्ति—बहुधा b अधिक है a से, कहने के स्थान पर हम कहते हैं कि a न्यून है b से अथवा a कम है b से और प्रतीक रूप में

$$a<b$$

लिखते हैं।

उदाहरणार्थ $9<12$ क्योंकि $12>9$.

5. किन्हीं धन-संख्याओं a, b, c के लिए सिद्ध कीजिए कि

(i) यदि $a<b$ तो $a+c<b+c$

(ii) यदि $a+c<b+c$ तो $a<b$

(iii) यदि $a<b$ तो $ac<bc$

(iv) यदि $ac<bc$ तो $a<b$

(v) यदि $a<b$ तो $a^2<b^2$

(vi) यदि $a<b$ और $b<c$ तो $a<c$.

6. किन्हीं धन-संख्याओं a, b, c, d के लिए सिद्ध कीजिए कि

(i) यदि $a<b$ और $c<d$ तो $a+c<b+d$

(ii) यदि $a<b$ और $c<d$ तो $ac<bd$.

7. x कोई धन-संख्या है। सिद्ध कीजिए कि

(i) यदि $5x+4<7$ तो $5x<3$

(ii) यदि $5x<3$ तो $5x+4<7$

(iii) यदि $2x+3<15$ तो $x<6$

(iv) यदि $x<6$ तो $2x+3<15$.

5. खुले कथन

हम सत्य और मिथ्या कथनों के बारे में जानते है। उदाहरणार्थ निम्नलिखित प्रत्येक कथन सत्य है :

(i) $3+4=4+3$ (ii) $(2\times 3)+4=2\times(3+2)$

(iii) $5+3>4+3$ (iv) $4\times 2<7\times 2$

(v) यदि 1 से भिन्न x कोई धन-संख्या हो तो

$$x<1.$$

किन्तु निम्नलिखित प्रत्येक कथन मिथ्या है :

(i) $3>5$ (ii) $3+4=(3+2)$

(iii) $9<9$ (iv) $7\times 3>8\times 3$

(v) धन-संख्याओं a और b के लिए

यदि $a>b$ तो $b^2>a^2$.

अब कथन

$$3x+4=13$$

और इसकी सत्यता के प्रश्न पर विचार कीजिए। कथन में x होने के कारण इसकी सत्यता के प्रश्न का उत्तर 'हाँ' या 'न' में निश्चयपूर्वक देना संभव नहीं है। योग और गुणन के अपवर्तन नियमों के आधार पर

यदि $3x+4=13$ तो $x=3$

और विलोमतः

यदि $x=3$ तो $3x+4=13$.

इस प्रकार हम देखते हैं कि कथन तब और तभी सत्य होगा जबकि

$$x=3$$

और तब और तभी मिथ्या होगा जबकि

$$x \neq 3.$$

प्रतीक '$\neq$' को 'बराबर नहीं है' पढ़ते हैं।

ठीक इसी प्रकार कथन

$$5x+7=17$$

$x=2$ के लिए सत्य है और $x \neq 2$ के लिए मिथ्या है।

जिन कथनों के विषय में हम सीधा ही यह नहीं कह सकते कि ये सत्य हैं अथवा मिथ्या उन्हें **खुले कथन** कहते हैं, क्योंकि इन कथनों के सत्य अथवा मिथ्या होने का प्रश्न इनके विषय में कुछ और जानकारी मिलने तक खुला रहता है।

ऊपर के दोनों खुले कथन समीकरण हैं। इनके अतिरिक्त ऐसे खुले कथन भी होते हैं जिन्हें असमीकरण अथवा असमता कहते हैं।

खुले कथन

$$3x+1<20$$

की ओर ध्यान दीजिए। यह एक असमता है। हम उन सभी धन-संख्याओं को जानना चाहते हैं जिनमें से किसी एक द्वारा x को प्रतिस्थापित करने पर यह कथन सत्य हो जाए।

परख से यह सरलतापूर्वक देखा जा सकता है कि ये संख्याएँ 1, 2, 3, 4, 5, 6 ही हैं, अन्य कोई नहीं।

ठीक इसी प्रकार हम खुले कथन

$$2x+1>4$$

पर विचार कर सकते हैं। यह भी एक असमता है। हम उन सभी सम धन-संख्याओं को जानना चाहते हैं जिनमें से किसी एक द्वारा x को प्रतिस्थापित करने पर यह कथन सत्य हो जाए। यह देखना कठिन नहीं है कि ये सम धन-संख्याएँ निम्नलिखित हैं :

$$2, 4, 6, 8, \ldots\ldots$$

इन प्रेक्षणों के आलोक में अब हम निम्नलिखित धारणाओं का परिचय देंगे :

(*i*) चर।

(*ii*) चर का प्रभाव-क्षेत्र।

(*iii*) खुले कथन का सत्य समुच्चय।

समीकरण अथवा असमता के रूप में प्रत्येक खुले कथन में कुछ विशेष संख्याओं के अतिरिक्त एक अथवा अधिक अक्षर भी होंगे। संख्याओं के साथ मिल जाने के प्रसंग में इस अक्षर का वर्णमाला के अंग के रूप में कोई अर्थ नहीं। वस्तुत: प्रत्येक खुले कथन का संबंध संख्याओं के किसी एक समुच्चय के साथ अनिवार्य है और इस अक्षर अथवा इन अक्षरों को इस समुच्चय का अंग समझना होगा। अत: यदि अक्षर x किसी खुले कथन में आ रहा हो और यदि S संख्याओं का एक ऐसा समुच्चय हो जिसका x कोई भी अंग हो सकता है तो हम

x को चर और समुच्चय S को उसका प्रभाव-क्षेत्र

कहेंगे।

इस प्रकार समुच्चय S को x के प्रतिस्थापनों का समुच्चय भी समझा जा सकता है।

चर को प्रतिस्थापित करके S के कुछ अंग, दिए हुए खुले कथन को सत्य बना देते हैं। S के इन अंगों को खुले कथन की सत्य संख्याएँ और इन सत्य संख्याओं के समुच्चय को खुले कथन का सत्य समुच्चय कहते हैं।

उदाहरणार्थ खुले कथन

$$3x + 1 < 20$$

के प्रसंग में चर x का प्रभाव-क्षेत्र धन-संख्याओं का समुच्चय है। इस कथन के सत्य समुच्चय के अंग

$$1, 2, 3, 4, 5, 6$$

हैं।

पुन: खुले कथन

$$2x+1>4$$

के प्रसंग में चर x का प्रभाव-क्षेत्र सभी सम धन-संख्याओं

$$2, 4, 6, 8, 10 \cdots\cdots$$

का समुच्चय है। प्रभाव-क्षेत्र स्वयं ही सत्य समुच्चय है।

कई बार हम प्रभाव-क्षेत्र का कोई भी ऐसा अंग नहीं खोज पाते जो चर प्रतिस्थापित करके खुले कथन को सत्य बनाता हो। उदाहरणार्थ यदि खुले कथन $x<1$ में x का प्रभाव-क्षेत्र सभी धन-संख्याओं का समुच्चय हो तो x को किसी भी धन-संख्या से प्रतिस्थापित करके कथन को सत्य नहीं बनाया जा सकता। ऐसी अवस्था में हम यह कह सकते हैं कि खुले कथन का सत्य समुच्चय रिक्त अथवा ख़ाली है।

नीचे कुछ खुले कथनों के सत्य समुच्चयों की सारणी दी जा रही है। इन सबमें चर का प्रभाव-क्षेत्र धन-संख्याओं का समुच्चय है :

खुले कथन	सत्य समुच्चय (अंग)
(*i*) $4x+1=13$	$\{3\}$
(*ii*) $4x+3<19$	$\{1, 2, 3\}$

(*iii*) $2x+1=4$	रिक्त समुच्चय
(*iv*) $x^2=1$	$\{1\}$
(*v*) $2x+1>3$	$\{2, 3, 4, ..\}$.

पाठक का यह देखना चाहिए कि प्रत्येक वर्ग में प्रभाव-क्षेत्र को

(क) सभी सम धन-संख्याओं के समुच्चय

(ख) सभी विषम धन-संख्याओं के समुच्चय

के रूप में बदलने पर सत्य समुच्चय किस प्रकार बदलेंगे।

निस्संदेह हमने ऊपर दिए हुए खुले कथनों के सत्य समुच्चयों का केवल अनुमान लगाने का यत्न किया है। परंतु प्रत्येक स्थिति में ऐसा संभव नहीं है। फिर भी यह जानकर हमें प्रसन्नता होगी कि समीकरणों और असमताओं के रूप में दिए हुए खुले कथनों के सत्य समुच्चयों को निकालने के लिए योग और गुणन संयोजनों और क्रम संबंध के नियमों पर आधारित पर्याप्त क्रम-बद्ध विधियाँ विद्यमान हैं।

खुले कथन के सत्य समुच्चय निकालने की विधि को खुले कथन का हल करना भी कहते हैं और सत्य समुच्चय का प्रत्येक अंग खुले कथन का मूल अथवा समाधान कहलाता है। हम यह भी कहते हैं कि किसी खुले कथन के सत्य समुच्चय का अंग उसका समाधान करता है।

तुल्य खुले कथन

किसी दिए हुए खुले कथन के सत्य समुच्चय को निकालने की विधि में खुले कथनों की एक शृंखला को प्राप्त करना होता है। इस शृंखला में निम्नलिखित गुण होते हैं :

(*i*) शृंखला के प्रत्येक खुले कथन का सत्य समुच्चय और दिए हुए खुले कथन का सत्य समुच्चय एक ही होता है;

(*ii*) शृंखला का प्रत्येक खुला कथन उससे पहले आने वाले सभी खुले कथनों से सरल होता है;

(*iii*) शृंखला के अंतिम खुले कथन का सत्य समुच्चय पूर्णतया स्पष्ट होता है।

दो खुले कथनों के सत्य समुच्चय एक ही हों तो उन्हें तुल्य कहा जाता है। इस प्रकार दो तुल्य कथनों के सत्य समुच्चय एक ही होंगे। उदाहरणार्थ कथन $3x+5=8$ और $3x+6=9$ तुल्य हैं।

किसी खुले कथन के सत्य समुच्चय को निकालने के लिए हम तुल्य खुले कथनों के युग्मों की एक ऐसी शृंखला बनाते हैं जिसके अंतिम कथन का सत्य समुच्चय स्पष्ट हो। इस प्रकार अंतिम खुले कथन का सत्य समुच्चय दिए हुए खुले कथन का भी सत्य समुच्चय होगा। इस अध्याय में चर का प्रभाव-क्षेत्र प्रायः धन-संख्याओं का समुच्चय होगा। अन्य स्थिति में विशेष उल्लेख कर दिया जाएगा।

तुल्य खुले कथनों की शृंखला प्राप्त करने के लिए हमें निम्नलिखित चार मूल सूत्रों को ध्यान में रखना होगा :

(*i*) किसी समीकरण अथवा असमता के दोनों पक्षों में एक ही धन-संख्या का योग।

(*ii*) किसी समीकरण अथवा असमता के दोनों पक्षों में, योज्य के रूप में आने वाली एक ही धन-संख्या का अपवर्तन ।

(*iii*) किसी समीकरण अथवा असमता के दोनों पक्षों का एक ही धन-संख्या द्वारा गुणन ।

(*iv*) किसी समीकरण अथवा असमता के पक्षों में खंड के रूप में आने वाली एक ही धन-संख्या का अपवर्तन ।

यह ध्यान देने योग्य है कि यदि सूत्र (*i*) द्वारा हम एक खुले कथन से दूसरे की ओर जाएँ तो सूत्र (*ii*) द्वारा पहले खुले कथन की ओर लौट सकते हैं । ठीक इसी प्रकार यदि सूत्र (*iii*) द्वारा हम एक खुले कथन से किसी दूसरे कथन को प्राप्त करें तो सूत्र (*iv*) द्वारा हम सदैव पहले खुले कथन की ओर लौट सकते हैं । इस प्रकार यदि कोई खुला कथन सत्य हो तो इन चार में से किसी सूत्र द्वारा प्राप्त कथन भी सत्य होगा और विलोमतः भी ।

इस विधि की व्याख्या कुछ उदाहरणों द्वारा नीचे की जा रही है :

उदाहरण

1. समीकरण $3x+5=11$ को हल कीजिए ।

हल समीकरण को

$$3x+5=6+5$$

के रूप में भी लिखा जा सकता है ।

दोनों पक्षों के योज्य 5 को काटने पर

$$3x=6 \qquad (ii \text{ के प्रयोग से})$$

इसको फिर

$$3x=3.2.$$

के रूप में भी लिखा जा सकता है ।

दोनों पक्षों के खंड 3 को काटने पर

$$x=2. \qquad (iv \text{ के प्रयोग से})$$

अपेक्षित सत्य समुच्चय में केवल संख्या 2 है ।

सत्यापन—परीक्षण अथवा सत्यापन के लिए हम देख सकते हैं कि

$$(3\times2)+5=11$$

सत्य है ।

2. समीकरण $2x+5=12$ को हल कीजिए ।

हल समीकरण को

$$2x+5=7+5$$

के रूप में भी लिख सकते हैं ।

दोनों पक्षों में योज्य 5 को काटने पर

$$2x=7 \qquad (ii \text{ के प्रयोग से})$$

अब, हमें कोई ऐसी धन-संख्या x नहीं मिलती जिसको 2 से गुणा करने का फल 7 हो। इस प्रकार समीकरण का सत्य समुच्चय रिक्त है।

3. असमता $2x+7<18$ को हल कीजिए।

हल असमता को

$$2x+7<11+7$$

के रूप में भी लिखा जा सकता है।

दोनों पक्षों में योज्य 7 को काटने पर

$$2x<11.$$

परख कर हम देखते हैं कि संख्याएँ 1, 2, 3, 4, 5 इस अंतिम कथन को सत्य बनाती हैं। अतः, असमता के समाधान समुच्चय में संख्याएँ 1, 2, 3, 4, 5 ही होंगी।

4. x का प्रभाव-क्षेत्र सभी विषम धन-संख्याओं का समुच्चय हो तो

$$3x+2>11$$

का सत्य समुच्चय निकालिए।

हल दी हुई असमता को

$$3x+2>9+2$$

के रूप में भी लिखा जा सकता है।

और इस प्रकार $3x>9$ अर्थात् $3x>3\times 3$

$$\therefore \quad x>3$$

सत्य समुच्चय में संख्याएँ 5, 7, 9, 11 $\cdots\cdots$ ही हैं।

प्रश्नावली

1. निम्नलिखित समीकरणों के सत्य समुच्चय निकालिए। प्रत्येक वर्ग में चर का प्रभाव-क्षेत्र धन-संख्याओं का समुच्चय है :

(i) $x+55=73$ (ii) $82+x=94$

(iii) $61+x=87$ (iv) $87+y=90$

(v) $y+36=62$ (vi) $y+3=60$

(vii) $x+13=13$ (viii) $2x=16$

(ix) $2x=5$ (x) $2x+5=11$

(xi) $3+7y=3y+19$ (xii) $3y+7=13$

(xiii) $9y+5=4y+9$ (xiv) $6x+7=2x+35$

(xv) $30y+11=3y+25.$

2. निम्नलिखित असमताओं को x के लिए हल कीजिए। प्रत्येक वर्ग में चर का प्रभाव-क्षेत्रधन-संख्याओं का समुच्चय है :

(*i*) $x+3>5$ (*ii*) $3x>9$
(*iii*) $3x+5>20$ (*iv*) $11x+9>6\ +13$
(*v*) $5x+4<7$ (*vi*) $2x+3<7$
(*vii*) $11+3x<2x+12$ (*viii*) $3<2x+1$
(*ix*) $x+1<7x$.

3. निम्नलिखित खुले कथनों को हल कीजिए। चर का प्रभाव-क्षेत्र विषम धन-संख्याओं का समुच्चय है।

(*i*) $87+y=90$ (*ii*) $2x=16$
(*iii*) $3x+5<11$ (*iv*) $5x+4<25$
(*v*) $3x>9$ (*vi*) $11x+3<9x+21$.

उदाहरण

x, y के लिए निम्नलिखित खुले कथनों को हल कीजिए। x, y का प्रभाव-क्षेत्र धन-संख्याओं का समुच्चय है।

(*i*) $x+y=11$ (*ii*) $x+y<7$.

हल

(*i*) अनिवार्यतः $x<11$. अब यदि $x=1$ तो $y=10$. इसी प्रकार यदि $x=2$ तो $y=9$, और आगे भी इसी प्रकार। अतः सत्य समुच्चय में संख्या युग्म (1, 10), (2, 9), (3, 8), (4, 7), (5, 6), (6, 5), (7, 4), (8, 3), (9, 2) और (10, 1) ही होंगे।

(*ii*) x का न्यूनतम मूल्य 1 हो सकता है। जब $x=1$ तो y संख्याओं 1, 2, 3, 4, 5 में से कोई एक हो सकती है। इसी प्रकार यदि $x=2$ तो y संख्याओं 1, 2, 3, 4 में से कोई एक हो सकती है, और आगे भी इसी प्रकार। अतः सत्य समुच्चय में संख्या युग्म (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (4, 1), (4, 2), (5, 1) ही होंगे।

प्रश्नावली

यदि x, और y कोई धन-संख्याएँ हों तो निम्नलिखित खुले कथनों को हल कीजिए :

(*i*) $2x+y=17$ (*ii*) $2x+3y=21$
(*iii*) $2x+y<2$ (*iv*) $2x+5y=6$.

6. व्यवकलन और विभाजन

व्यवकलन—यदि a और b कोई दो धन-संख्याएँ हों तो क्या सदैव हम एक धन-संख्या d निकाल सकते हैं जिसके लिए

$$a=b+d\ ?$$

इस प्रश्न का उत्तर होगा 'नहीं', क्योंकि यदि a, b क्रमशः 3 और 5 हों तो हम कोई धन-संख्या नहीं निकाल सकते जिसके लिए

$$3=5+d.$$

मान लीजिए कि a और b कोई दो धन-संख्याएँ हैं। वस्तुतः क्रमसंबंध '$>$' के आधार पर हम जानते हैं कि $a>b$ होने पर ही धन-संख्या d जिसके लिए

$$a=b+d$$

विद्यमान होगी।

यदि संख्या d विद्यमान हो तो इसे क्रमित संख्याओं a और b का अंतर कहते हैं। इसको प्रतीक रूप में

$$a-b$$

लिखते हैं। इस प्रतीक को 'a ऋण b' अथवा 'b व्यवकलित a में से' पढ़ेंगे। अतः समता

$$a=b+d$$

को

$$a-b=d$$

के रूप में भी लिखते हैं।

संख्या $a-b$ को प्राप्त करने की विधि व्यवकलन कहलाती है अतः व्यवकलन योग का प्रतिलोम है। निश्चय ही, $a-b$ वह संख्या है जिसे b में जोड़ने से योगफल a हो जाए।

व्यवकलन द्वारा धन-संख्याओं a और b के क्रमित युग्म के साथ हम धन-संख्या $a-b$ का संबंध तभी जोड़ सकते हैं जब $a>b$। इस सीमा बंधन के कारण हम सदैव किसी धन-संख्या को किसी दी हुई धन-संख्या में से नहीं घटा सकते। हम कहते हैं कि व्यवकलन के प्रसंग में धन-संख्याओं का समुच्चय बंद नहीं है। यहाँ पाठक यह ध्यान दें कि योग के प्रसंग में धन-संख्याओं का समुच्चय बंद है क्योंकि हम सदैव किन्हीं दो धन-संख्याओं को जोड़कर, योगफल एक धन-संख्या के रूप में प्राप्त कर सकते हैं।

यह भी ध्यान देने योग्य हैं कि जहाँ-जहाँ a में से b को घटाया जा सकता है, वहाँ b में से a को नहीं घटाया जा सकता। अतः धन-संख्याओं के समुच्चय में क्रम-विनिमेय नियम का प्रश्न ही नहीं उठता।

अब तीन धन-संख्याएँ, जैसे 25, 12, 3 इसी क्रम में लीजिए। साहचर्य की दो विभिन्न रीतियों द्वारा हम

$$(25-12)-3 \qquad \text{और} \qquad 25-(12-3)$$

धन-संख्याएँ प्राप्त करते हैं।

ये संख्याएँ क्रमशः 10 और 16 बनती हैं। अब निष्कर्ष क्या होगा? वस्तुतः हम यह देखते हैं कि धन-संख्याओं के समुच्चय में व्यवकलन की सहचारिता नहीं होती।

टिप्पणी

एक धन-संख्या में से किसी दूसरी को सदैव न घटा सकने के सीमाबंधन के कारण हमें ध्यान

रखना चाहिए कि जब भी प्रतीक

$$a-b$$

आए, तो हम प्रतिबंध

$$a>b$$

में कार्य कर रहे हैं, भले ही इस प्रतिबंध का स्पष्ट उल्लेख न हो ।

उदाहरण

1. किन्हीं धन-संख्याओं a, b, c के लिए सिद्ध कीजिए कि

$$a(b-c)=ab-ac$$

यदि $b>c$.

हल

$$b>c$$
$$\Rightarrow ab>ac$$
$$\Rightarrow ab-ac \quad \text{सार्थक है ।}$$

अब $a(b-c)+ac=a[(b-c)+c]$

$$=ab$$ व परिभाषा

अतः $a(b-c)=ab-ac$

2. धन-संख्या x के किन मूल्यों के लिए व्यंजक

$$(2x-8)-x$$

सार्थक है ?

हल $2x-8$ सार्थक है जबकि

$$2x > 8,$$

जिसको दूसरे रूप में $x > 4$

लिख सकते हैं ।

पुनः $(2x-8)-x$ सार्थक है जबकि

$$(2x-8)>x.$$

दोनों पक्षों में 8 जोड़ने पर इसका तुल्य रूप

$$2x>x+8$$

अथवा $x+x>x+8$

होगा ।

दोनों पक्षों से योज्य $8x$ काटने पर

$$x > 8.$$

इस प्रकार दिया हुआ व्यंजक तब सार्थक होगा जब

$$x > 4 \text{ और } x > 8$$

अतः दिया हुआ व्यंजक तब और तभी सार्थक है जब

$$x > 8.$$

इस प्रकार x संख्याओं 9, 10, 11, 12 . . . . में से ही कोई हो सकती है।

3. समीकरण

$$8-5x=3$$

को हल कीजिए। चर का प्रभाव-क्षेत्र धन-संख्याओं का समुच्चय है।

हल x ऐसी संख्या होनी चाहिए जिसके लिए

$$8 > 5x.$$

और यह तभी संभव है जब

$$x=1.$$

पुनः $8-5x=3$

का तुल्य रूप $8=5x+3$ है। (व्यवकलन की परिभाषा)

अब इसके तुल्य रूपों की शृंखला इस प्रकार है :

$$5+3=5x+3,$$
$$5=5x,$$
$$1=x.$$

अतः दिए हुए समीकारण का हल 1 ही है।

परीक्षण—x के लिए 1 लिखने पर

$$8-5.1=3$$

एक सत्य कथन है।

प्रश्नावली

1. जहाँ संभव हो पहली संख्या में से दूसरी को घटाइए।
   (*i*) 25, 11 (*ii*) 37, 39
   (*iii*) 14, 12 (*iv*) 15, 15.
2. धन-संख्या x के किन मूल्यों के लिए निम्नलिखित व्यंजक सार्थक हैं ?
   (*i*) $4-x$ (*ii*) $x-9$ (*iii*) $x-(3x-8)$
3. निम्नलिखित खुले कथनों को हल कीजिए। चर का प्रभाव-क्षेत्र धन-संख्याओं का समुच्चय है।
   (*i*) $x-14=90$ (*ii*) $7-3x=4$
   (*iii*) $x-3 > 7$ (*iv*) $2-3x<1$
   (*v*) $3-x < 8$ (*vi*) $3x-2 < 5.$

विभाजन

योग के प्रतिलोम व्यवकलन के समान, गुणन का प्रतिलोम विभाजन होता है।

यदि a और b कोई दो धन-संख्याएँ हों, तो क्या सदैव हम एक धन-संख्या c निकाल सकते हैं जिसके लिए

$$a=bc\ ?$$

हम इस प्रश्न को एक विशेष स्थिति में देखते हैं जिसमें

$$a=3 \qquad \text{और} \qquad b=2$$

क्या हम एक ऐसी धन-संख्या c निकाल सकते हैं जिसके लिए

$$3=2c\ ?$$

इस प्रश्न का उत्तर होगा 'नहीं'। वस्तुतः

$$2\times1=2 \qquad \text{और} \qquad 2\times2=4$$

और यदि $c>2$ तो $2c>2\times2$

अर्थात् $2c>4$.

इस प्रकार हम कोई धन-संख्या c नहीं निकाल सकते जिसके लिए

$$3=2c.$$

तथापि, a और b कुछ विशिष्ट संख्याएँ होने पर हम ऐसी संख्या c निकाल सकते हैं जिसके लिए

$$a=bc.$$

उदाहरणार्थ, यदि $a=12$ और $b=3$ तो $c=4$

क्योंकि $12=3\times4$.

परिभाषा

दी हुई दो संख्याओं a और b के लिए, यदि एक ऐसी धन-संख्या c विद्यमान हो जिसके लिए

$$a=bc$$

तो हम

$$c=a\div b$$

लिखते हैं। इसे हम

'a विभाजित b से' बराबर है c के

पढ़ते हैं और कहते हैं कि a विभाज्य है b से। हम यह भी कहते हैं कि b खंड है a का अथवा तुल्य रूप में a अपवर्त्य है b का।

संख्या $a\div b$ को प्राप्त करने की विधि को विभाजन कहते हैं। निश्चय ही $a\div b$, यदि विद्यमान हो, तो वह धन-संख्या है, जिसे b से गुणा करने पर गुणनफल धन-संख्या a हो जाए।
जब धन-संख्या

$$a\div b$$

विद्यमान हो केवल तभी विभाजन द्वारा हम धन-संख्याओं a और b के क्रमित युग्म के साथ उसका संबंध जोड़ सकते हैं। दो विभिन्न धन-संख्याओं a और b में से यदि b खंड हो a का तो a खंड

नहीं होगा b का। किन्तु यदि a और b बराबर हों तो 'a खंड है b का' और 'b खंड है a का' ये दोनों कथन युगपत् सत्य होंगे। उदाहरणार्थ, यदि

$$a = 13 = b$$

तो a खंड है b का और b खंड है a का क्योंकि धन-संख्या 1 विद्यमान है, जिसके लिए

$$13 = 1.13$$

किसी धन-संख्या को किसी दूसरी धन-संख्या से सदैव विभाजित न कर सकने के सीमा-बंधन के कारण हम कहते हैं कि विभाजन के लिए धन-संख्याओं का समुच्चय बंद नहीं है। किन्तु गुणन के लिए यह बंद है।

यह ध्यान देने योग्य है कि यदि a विभाजित हो सके b से तो a और b के समान होने पर ही b विभाजित हो सकता है a से। इस प्रकार धन-संख्याओं के समुच्चय में विभाजन की क्रम-विनिमेयता नहीं होती।

अब तीन धन-संख्याएँ, जैसे 72, 12, 2 इसी क्रम में लें। इन तीन धन-संख्याओं से साहचर्य की दो विभिन्न रीतियों द्वारा विभाजन करने पर हम

$$(72 \div 12) \div 2 \text{ और } 72 \div (12 \div 2)$$

दो धन-संख्याएँ प्राप्त करते हैं। ये संख्याएँ क्रमशः

$$6 \div 2 \text{ और } 72 \div 6$$

अर्थात् 3 और 12

बनती हैं।

इसलिए हम देखते हैं कि धन-संख्याओं के समुच्चय में विभाजन का साहचर्य नियम नहीं होता।

टिप्पणी—एक धन-संख्या को किसी दूसरी धन-संख्या से सदैव विभाजित न कर सकने के सीमा-बंधन के कारण हमें ध्यान रखना चाहिए कि जब भी प्रतीक

$$a \div b$$

आए, तो हम प्रतिबंध 'a अपवर्त्य है b का' अथवा तुल्यरूप में 'b खंड है a का' में कार्य कर रहे हैं, भले ही इस प्रतिबंध का स्पष्ट उल्लेख न हो।

इसमें कोई संदेह नहीं कि व्यवकलन और विभाजन के सीमा-बंधनों के कारण असंतोष की भावना रहती है। फिर भी यह एक रोचक तथ्य है कि विस्तृत और सुंदर **संख्या सिद्धांत** धन-संख्याओं के समुच्चय में विभाजन के सीमा-बंधन की ही देन है। अध्याय II में इस संख्या सिद्धांत के प्रारंभिक स्वरूप पर विचार किया जाएगा।

यह कहना अप्रासंगिक नहीं होगा कि कई भारतीय गणितज्ञों, विशेषतः रामानुजन्, को इस सिद्धांत में मौलिक योगदान करने का श्रेय प्राप्त है।

प्रश्नावली

1. जहाँ भी संभव हो, पहली संख्या को दूसरी से भाग दीजिए :

(*i*) 26, 13 (*ii*) 25, 15

(*iii*) 37, 37 (*iv*) 4, 12.

2. धन-संख्या x के किन मूल्यों के लिए निम्नलिखित व्यंजक सार्थक हैं :

(*i*) $x \div 3$ (*ii*) $3 \div x$

(*iii*) $(x+3) \div 2$ (*iv*) $36 \div (x+7)$

(*v*) $36 \div (7-x)$ (*vi*) $(x-2) \div 6$.

3. निम्नलिखित खुले कथनों को हल कीजिए। चर का प्रभाव-क्षेत्र धन-संख्याओं का समुच्चय है।

(*i*) $x \div 2 = 7$ (*ii*) $(x \div 2) + 3 = 4$

(*iii*) $(3x+4) - 3 = 9$ (*iv*) $x \div 3 > 4$

(*v*) $4 \div x < 7$ (*vi*) $4 \div x > 3$.

7. संक्रियाओं का क्रम, समूहन-प्रतीक, कोष्ठक

अब तक हम योग और गुणन की संक्रियाओं तथा उनकी प्रतिलोम व्यवकलन और विभाजन की संक्रियाओं के नियमों का अध्ययन कर चुके हैं। हमने व्यवकलन और विभाजन की संक्रियाओं के सीमा-बंधनों का निर्देश भी किया है। इनमें से प्रत्येक संक्रिया द्विमय है क्योंकि धन-संख्याओं के युग्म से ही प्रत्येक संक्रिया द्वारा एक धन-संख्या प्राप्त होती है। इन चार संक्रियाओं के लिए निम्नलिखित प्रतीक प्रयोग में आते हैं :

$$+, \ -, \ \times, \ \div.$$

प्रत्येक प्रतीक दो संख्याओं के मध्य में आकर अंततः एक नई धन-संख्या बनाता है। उदाहरण के लिए

$$3+2=5, \ 5-4=1, \ 2\times 3=6, \ 6\div 2=3.$$

प्रत्येक वर्ग में हम दो संख्याएँ और चार में से एक संक्रिया लेकर चलते हैं।

परंतु ऐसे व्यंजक भी होते हैं जिनमें एक से अधिक संक्रियाएँ और दो से अधिक संख्याएँ आती हों। ऐसी स्थिति में यह ध्यान देने योग्य है कि प्रायः संक्रियाओं का क्रम महत्त्वपूर्ण होता है क्योंकि सभी संक्रियाओं के पश्चात् प्राप्त होने वाला अंतिम फल उनके क्रम पर निर्भर होता है। नीचे के उदाहरणों में हम संक्रियाओं के क्रम पर अंतिम फल की निर्भरता के प्रदर्शन का प्रयत्न करेंगे।

I. व्यंजक

$$12-4-3$$

पर विचार कीजिए।

इसमें तीन संख्याएँ 12, 4 और 3 हैं और व्यवकलन की संक्रिया दो बार आती है। व्यवकलन

प्रतीक संख्या 4 और 3 के बीच तथा 12 और 4 के बीच आता है। कौन-सा व्यवकलन पहले किया जाए इसके आधार पर हम दो विभिन्न रीतियाँ अपना सकते हैं।

इस प्रकार संख्याएँ

$$12-(4-3)$$

अथवा $(12-4)-3$

प्राप्त होती हैं।

इस प्रकार यदि पहले दायाँ और फिर बायाँ व्यवकलन करें तो संख्या

$$12-(4-3)=12-1=11$$

प्राप्त होती है।

इसके विपरीत, पहले बायाँ और फिर दायाँ व्यवकलन करने पर संख्या

$$(12-4)-3=8-3=5$$

प्राप्त होगी।

दोनों स्थितियों में दो भिन्न परिणाम निकलते हैं।

अतः, यदि व्यंजक

$$12-4-3$$

के साथ व्यवकलन के क्रम का पता न हो तो हम एक अनिश्चित स्थिति में उलझ जाएँगे।

संक्रियाओं के क्रम का निर्देश करने के लिए हम

समूहन-प्रतीकों

अथवा

कोष्ठकों

का प्रयोग करते हैं।

सामान्यतः प्रयोग में आने वाले कोष्ठक-युग्म

( ), [ ], { }

क्रमशः

लघु, गुरु, धनु कोष्ठक कहलाते हैं।

इस प्रकार किसी संक्रिया-प्रतीक से संबद्ध दो धन-संख्याओं के दोनों ओर हम विशेष प्रकार का कोष्ठक युग्म रख देते हैं। किसी व्यंजक में हम एक ही प्रकार के कितने ही कोष्ठक-युग्मों का प्रयोग कर सकते हैं।

पुनः व्यंजक

$$12-4-3$$

को देखिए।

ऊपर के वर्णन के अनुसार यदि हम समूहन-प्रतीकों का प्रयोग निम्नलिखित रूप में करें तो परिकलन की दो रीतियों का स्पष्ट उल्लेख हो जाएगा।

(*i*) $12-(4-3)$

(*ii*) $(12-4)-3$

(i) में पहले दायाँ और (ii) में पहले बायाँ व्यवकलन करना होगा। इस प्रकार

$$12-4-3$$

की अस्पष्टता का निवारण समूहन प्रतीकों द्वारा होने पर

$$12-(4-3)=12-1=11$$
$$(12-4)-3 = 8-3=5$$

रूप स्पष्टतः प्राप्त होते है।

नीचे कुछ और उदाहरण दिए जा रहे हैं।

II. दो विभाजनों वाले व्यंजक

$$24\div6\div2$$

को देखिए। इसमें

$$24\div(6\div2)=24\div3=8$$
$$(24\div6)\div2= 4\div2=2.$$

III. व्यंजक

$$24\div6\times2$$

को देखिए। इसमें

$$24\div(6\times2)=24\div12=2$$
$$(24\div6)\times2=4\times 2=8.$$

IV. व्यंजक

$$24\times6\div2$$

को देखिए। इसमें

$$24\times(6\div2)=24\times3=72$$

और $$(24\times6)\div2=144\div2=72.$$

V. व्यंजक

$$2+3\times6$$

को देखिए। इसमें

$$2+(3\times6)=2+18=20$$
$$(2+3)\times6=5\times6 =30.$$

IV. व्यंजक

$$a+b+c$$

को देखिए।

अब $a+(b+c)=(a+b)+c.$

व्यंजक

$$a\times b\times c$$

के लिए

$$a \times (b \times c) = (a \times b) \times c.$$

हम देखते हैं कि संक्रियाओं का क्रम प्रायः महत्त्वपूर्ण है। निस्संदेह ऐसी स्थितियाँ भी होती हैं जिनमें वर्ग IV और VI के समान अंतिम फल एक ही होने के कारण कोई अस्पष्टता नहीं होती।

यदि किसी व्यंजक में दो से अधिक संक्रियाएँ भी एक साथ आती हों और उसमें कोई अस्पष्टता हो तो समूहन प्रतीकों द्वारा उसे दूर किया जा सकता है।

उदाहरणार्थ, चार संख्याओं और तीन संयोजनों वाले व्यंजक

$$a + b \div c \times d$$

पर विचार कीजिए। इस रूप में यह व्यंजक अस्पष्ट है। भिन्न-भिन्न रूपों में कोष्ठक रखने से प्रायः भिन्न-भिन्न संख्याएँ प्राप्त होती हैं, परंतु एक बार कोष्ठक रख चुकने पर संख्या निश्चित हो जाती है। इस प्रकार निम्नलिखित विभिन्न व्यंजक प्राप्त होते हैं :

(*i*) $[(a+b) \div c] \times d$
(*ii*) $[a+(b \div c)] \times d$
(*iii*) $a+[b \div (c \times d)]$
(*iv*) $a+[(b \div c) \times d]$
(*v*) $(a+b) \div (c \times d)$.

यह ध्यान देने योग्य है कि पाँचों वर्गों में संख्याओं और संक्रिया-प्रतीकों के स्थान वही रखे गए हैं।

इस भाग का समापन करते हुए हम यह कहना चाहते हैं कि यद्यपि आपको विभिन्न संक्रियाएँ करने का सामान्य क्रम बतलाया गया होगा, तथापि यह केवल परम्परा की बात है। इसलिए इस पुस्तक में हम सदैव कोष्ठकों का प्रयोग संक्रियाएँ करने का क्रम बताने के लिए करेंगे।

प्रश्नावली

कोष्ठकों के प्रयोग द्वारा निम्नलिखित में से विभिन्न विशेष संख्याएँ निकालिए।

(*i*) $16+8 \div 2 \times 4$ (*ii*) $17+9-2 \times 4$
(*iii*) $72 \div 6-3 \times 1$ (*iv*) $8 \times 6-1+3$.

समुच्चय, कथन, प्रतीक-निरूपण

इस अध्याय में हम बार-बार धन-संख्याओं के समुच्चय की बात करते रहे हैं। इस भाग में हम समुच्चयों की भाषा और संकेत-पद्धति तथा कथनों के प्रतीक-निरूपण का परिचय प्राप्त करेंगे।

समुच्चय वस्तुओं का समूह है और समूह की प्रत्येक वस्तु को इस समुच्चय का एक अवयव अथवा एक अंग कहते हैं। समुच्चयों के उदाहरण रूप में हम निम्नलिखित को ले सकते हैं :

(*i*) आपके विद्यालय के सभी छात्रों का समुच्चय।

(*ii*) दिल्ली के सभी मनुष्यों का समुच्चय।
(*iii*) सभी धन-संख्याओं का समुच्चय।
(*iv*) 5 से कम सभी धन-संख्याओं का समुच्चय।
(*v*) सभी सम धन-संख्याओं का समुच्चय।
(*vi*) 7 के सभी अपवर्त्यों का समुच्चय।
(*vii*) 2 के सभी घातों का समुच्चय।
(*viii*) सभी धन-संख्याओं x, जिनके लिए $2x+1=9$, का समुच्चय।
(*ix*) सभी धन-संख्याओं x, जिनके लिए $2x+3<7$, का समुच्चय।
(*x*) सभी धन-संख्याओं x, जिनके लिए $3x+1>7$, का समुच्चय।
(*xi*) संख्याओं 2, 7, 11 का समुच्चय।
(*xii*) 12 के खंडों का समुच्चय।

किसी समुच्चय का निरूपण करने के लिए हम उसके सभी अंगों को धनु कोष्ठकों के बीच लिख देते हैं। अतः, उदाहरणार्थ, *iv*, *v*, *vii*, *viii*, *xi*, *xii* समुच्चयों का निरूपण

(*iv*) $\{1, 2, 3, 4\}$
(*v*) $\{2, 4, 6, 8, \cdots\cdots\}$
(*vii*) $\{2, 2^2, 2^3, 2^4 \cdots\cdots\}$
(*viii*) $\{4\}$
(*xi*) $\{2, 7, 11\}$
(*xii*) $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

के रूप में किया जा सकता है।

प्रश्नावली

(*iii*), (*iv*), (*ix*) और (*x*) समुच्चयों का निरूपण उनके अंग लिखकर कीजिए। (*iv*), (*xi*) प्रकार के समुच्चयों और (*iii*), (*v*), (*vii*) प्रकार के समुच्चयों में भेद किया जा सकता है। (*iii*) या (*v*) या (*vii*) समुच्चय के सभी अंगों को लिख सकना संभव नहीं है। इस प्रकार के समुच्चयों को अनंत और (*iv*), (*xi*) प्रकार के समुच्चयों को सांत कहते हैं।

प्रश्नावली

(*i*) पाँच सांत समुच्चय लिखिए।
(*ii*) तीन अनंत समुच्चय लिखिए।

कथन

$$3x+7=2$$

को सत्य बनाने वाली सभी धन-संख्याओं के समुच्चय का उदाहरण लीजिए। क्योंकि संख्या

7 अधिक है 2 से इसलिए हम देखते हैं कि कोई धन-संख्या x सम्भव नहीं है । इस प्रकार के समुच्चय को हम पहले ही एक विशेष नाम दे चुके हैं। वह आपको स्मरण होगा कि ऐसे समुच्चय को हमने रिक्तसमुच्चय कहा था । जिस समुच्चय में कोई वस्तु न हो उसे रिक्त, खाली या वस्तुरहित समुच्चय कहते हैं। ऐसे समुच्चय को प्रतीक ϕ द्वारा सूचित करने की प्रथा है । इस प्रतीक को 'फ़ाई' पढ़ा जाता है ।

प्राय: समुच्चयों को सूचित करने के लिए बड़े अक्षर S, T, A, B, C इत्यादि प्रयोग में आते हैं। धन-संख्याओं के समुच्चय

$$\{1, 2, 3, \ldots\ldots\}$$

को प्रतीक **N** द्वारा सूचित करेंगे ।

हमने समुच्चय की किसी वस्तु को उसका अंग कहा है । अब, यदि a किसी समुच्चय S का अंग हो तो हम

$$a \in S$$

लिखते हैं और इसे 'a निहित है S में' अथवा 'a अवयव है S का' अथवा 'a अंग है S का' पढ़ते हैं ।

प्रश्नावली

यदि S समुच्चय $\{2, 7, 11\}$ हो तो निम्नलिखित कथनों में से कौन-से सत्य और कौन-से मिथ्या हैं ?

(*i*) $2 \in S$ (*ii*) $8 \in S$

(*iii*) $4 \in S$ (*iv*) $5 \in S$.

यदि कोई वस्तु a समुच्चय S का अवयव नहीं है तो हम $a \in S$ लिखते हैं । $a \notin S$ इसे 'a अंग नहीं है S का' पढ़ते हैं ।

प्रश्नावली

यदि S समुच्च $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ हो तो निम्नलिखित कथनों में से कौन-से सत्य और कौन-से मिथ्या हैं ?

(*i*) $2 \in S$ (*ii*) $6 \in S$

(*iii*) $5 \in S$ (*iv*) $3 \in S$

(*v*) $1 \in S$ (*vi*) $12 \in S$

(*vii*) $12 \in S$ (*viii*) $4 \in S$.

संकेत पद्धति : पाठक देखेगा कि अगले अध्याय में हम धन-संख्याओं के खंडों के समुच्चयों का अध्ययन करेंगे । हमने संख्या a के सभी खंडों के समुच्चय को खंड a, द्वारा सूचित करने की संकेत पद्धति यहाँ अपनाई है । उदाहरण के लिए

$$\text{खंड } 12 = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}.$$

प्रश्नावली

निम्नलिखित समुच्चयों का निरूपण कीजिए ।

(i) खंड 13 (ii) खंड 25
(iii) खंड 36 (iv) खंड 53
(v) खंड 1 (vi) खंड 24
(vii) खंड 60 (viii) खंड 45.

समुच्चय-निर्मात्री संकेत-पद्धति—किसी समुच्चय के विभिन्न अंगों को लिखने के स्थान पर कई बार इसके निरूपण का प्रयोग अधिक सुविधाजनक होता है । इस निरूपण को हम प्रायः समुच्चय-निर्मात्री संकेत-पद्धति कहते हैं । उदाहरण के लिए, समुच्चय $\{2, 2^2, 2^3, 2^4 \ldots\ldots\}$ का निरूपण

$$\{2^n : n \in \mathbf{N}\}$$

के रूप में होता है ।

इस का अर्थ यह हुआ कि समुच्चय **N** के प्रत्येक अंग अर्थात् प्रत्येक धन-संख्या द्वारा n को प्रतिस्थापित करके प्राप्त होने वाली सभी धन-संख्याएँ 2^n इस समुच्चय के अंग हैं । इस निरूपण को निम्नलिखित रूप में पढ़ सकते हैं :

संख्याएँ 2^n, जहाँ n अंग है **N** का, समुच्चय बनाती हैं । अतः ' : ' को 'जहाँ' पढ़ते हैं ।

पुनः समुच्चय $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ का निरूपण

$$\{x : x < 7,\ x \in \mathbf{N}\}$$

के रूप में हो सकता है ।

समुच्चय $\{4\}$ का निरूपण

$$\{x : 2x+1=9,\ x \in \mathbf{N}\}$$

और समुच्चय $\{5, 10, 15, 20, \ldots\ldots\}$ का निरूपण

$$\{5a : a \in \mathbf{N}\}$$

के रूप में हो सकता है ।

समुच्चयों की समता

परिभाषा : यदि S का प्रत्येक अंग T का भी अंग हो और विलोमतः T का प्रत्येक अंग S का भी अंग हो तो दोनों समुच्चय S और T बराबर कहलाते हैं ।

पाठक सरलता से देख सकते हैं कि निम्नलिखित सत्य कथन हैं ।

(i) $\{5a : a \in \mathbf{N}\} = \{5, 10, 15, 20, \ldots\ldots\}$
(ii) $\{1, 3, 5\} = \{5, 1, 3\}$
(iii) $\{x : 3x+1 > 7,\ x \in \mathbf{N}\} = \{3, 4, 5, 6, \ldots\ldots\}$

यह ध्यान देने योग्य है कि समुच्चय केवल एक समूह है और उसके अंगों का क्रम कोई महत्त्व नहीं रखता। इस प्रकार, उदाहरण के लिए,

$$\{1, 3, 5, 7\} = \{7, 5, 3, 1\}.$$

किसी अंग की आवृत्ति से भी समुच्चय नहीं बदलता। अतः

$$\{7, 3, 5, 5, 1\} = \{1, 1, 7, 3, 5, 3\}$$

समुच्चय का उपसमुच्चय = समुच्चय का अति समुच्चय

परिभाषा—यदि T का प्रत्येक अंग S का भी अंग हो तो समुच्चय T समुच्चय S का उपसमुच्चय कहलाता है। इसको प्रतीक रूप में

$$T \subset S$$

लिखते हैं और 'T उपसमुच्चय है S का' अथवा 'T अन्तर्विष्ट है S में' पढ़ते हैं। पुनः यदि T उपसमुच्चय हो S का तो हम यह भी कहते हैं कि S अतिसमुच्चय है T का। इसको प्रतीक रूप में

$$S \supset T$$

लिखते हैं और 'S अतिसमुच्चय है T का' अथवा 'S में अन्तर्विष्ट है T' पढ़ते हैं। उदाहरणार्थ

(*i*) $\{1, 3, 5,\} \subset \{3, 5, 7, 1\}$.

(*ii*) आपकी कक्षा के विद्यार्थियों का समुच्चय उपसमुच्चय है आपके विद्यालय के विद्यार्थियों के समुच्चय का।

(*iii*) दिल्ली निवासियों का समुच्चय उपसमुच्चय है भारतवासियों के समुच्चय का।

(*iv*) धन-संख्याओं का समुच्चय अतिसमुच्चय है 36 के खंडों के समुच्चय का प्रतीक रूप में, हम

$$\mathbf{N} \supset \text{खंड } 36$$

लिख सकते हैं।

पुनः
$$\text{खंड } 36 \subset \text{खंड } 36$$

अर्थात् 36 के खंडों का समुच्चय अपना उपसमुच्चय भी है।

वस्तुतः प्रत्येक समुच्चय S अपना उपसमुच्चय भी होता है। हमें केवल यही देखना है कि S का प्रत्येक अंग S का भी अंग हो और यह निश्चय ही होता है। अतः किसी भी समुच्चय S के लिए

$$S \subset S$$

एक सत्य कथन है।

पुनः किसी भी समुच्चय S के लिए सदैव

$$\phi \subset S$$

होगा अर्थात् खाली समुच्चय उपसमुच्चय होता है प्रत्येक समुच्चय S का। इसको समझने के लिए हमें यह देखना होगा कि ϕ का प्रत्येक अंग S का भी अंग है, दूसरे शब्दों में, हमें यह देखना होगा कि ϕ का कोई ऐसा अंग नहीं जो S का अंग न हो, क्योंकि ϕ में कोई अंग नहीं। इसलिए उपर्युक्त परिणाम तुरंत निकल आता है।

अत: निष्कर्ष यह हुआ कि प्रत्येक अ-रिक्त समुच्चय S के कम से कम दो उपसमुच्चय ϕ और S अवश्य होते हैं।

परिभाषा : समुच्चय S के ϕ और S से भिन्न किसी उपसमुच्चय T को S का वास्तविक उप-समुच्चय कहते हैं।

सावधान—विद्यार्थी को 'अंग है' और 'अंतर्विष्ट है' के प्रतीकों क्रमशः

$$\in, \subset$$

में उत्पन्न हो सकने वाले किसी भी भ्रम के प्रति सावधान रहना चाहिए। किसी भी कथन में प्रतीक $\in$ के बाँई ओर कोई अंग और दांई ओर कोई समुच्चय होना आवश्यक है। परंतु प्रतीक $\subset$ के दोनों ओर एक-एक समुच्चय का होना आवश्यक है।

उदाहरण

$$\{1\} \subset \{1, 2, 3, 4\}$$
$$1 \in \{1, 2, 3, 4\}$$

यह ध्यान देने योग्य है कि 1 तो अंग है किन्तु $\{1\}$ इस अंग 1 का समुच्चय है।

प्रश्नावली

निम्नलिखित समुच्चयों के सभी सम्भव उपसमुच्चय दीजिए।

(*i*) $\{1, 3, 5,\}$ (*ii*) $\{7\}$

(*iii*) $\{2, 6\}$ (*iv*) ϕ.

ऐसा भी हो सकता है कि किन्हीं दो समुच्चयों S और T में से कोई भी एक दूसरे का उप-समुच्चय न हो। उदाहरण के लिए क्रमशः 24 और 36 के खंडों के समुच्चय लीजिए। पाठक को चाहिए कि वह इन दोनों समुच्चयों को लिखे और देखे कि इन दोनों में से कोई भी एक दूसरे का उपसमुच्चय क्यों नहीं है।

प्रश्नावली

निम्नलिखित को सिद्ध किजिए।

(*i*) खंड 12 $\subset$ खंड 36 (*ii*) खंड 30 $\supset$ खंड 15

(*iii*) खंड 18 उपसमुच्चय नहीं है खंड 30 का (*iv*) खंड 30 उपसमुच्चय नहीं है खंड 18 का।

संख्याओं के किसी समुच्चय के न्यूनतम और अधिकतम अंग

धन-संख्याओं के समुच्चय **N** को लीजिए। निश्चय ही समुच्चय **N** का अंग 1 इसके किसी भी अंग से या तो न्यून है या बराबर है। इस संख्या 1 को समुच्चय **N** का न्यूनतम कहते हैं।

वस्तुत: समुच्चय **N** के प्रत्येक अतिरिक्त उपसमुच्चय में सदैव कोई न्यूनतम अंग होगा। धन-संख्याओं के समुच्चय के इस नियम का वर्णन यह कहकर किया जाता है कि धन-संख्याओं का समुच्चय **N** सुक्रमित है।

यदि हम **N** के किसी सांत उपसमुच्चय, जैसे

$$S=\{1, 3, 6, 2, 18\}$$

को लें तो S का अंग 18 इसके प्रत्येक अंग से अधिक अथवा उस अंग के बराबर है। इस संख्या 18 को S के सभी अंगों में से अधिकतम कहते हैं। समुच्चय **N** का कोई अधिकतम अंग नहीं होता।

पुन: **N** के किसी सांत उपसमुच्चय का तो अधिकतम अंग होता है किन्तु **N** के किसी अनंत उपसमुच्चय का अधिकतम अंग नहीं होता।

प्रश्नावली

निम्नलिखित में से प्रत्येक वर्ग के न्यूनतम और अधिकतम (यदि विद्यमान हों) अंग लिखिए :

(i) $\{2, 4, 6, 8, \ldots\}$ (ii) $\{2, 4, 16, 256\}$

(iii) $\{10, 11, 12, 13, \ldots\}$ (iv) $\{10, 15, 35, 70\}$

(v) $\{1\}$

समुच्चयों की संक्रियाएँ, संघ और सर्वनिष्ठ

कोई दो समुच्चय S और T लीजिए। समुच्चय S में या समुच्चय T में या दोनों में निहित सभी अंगों के समुच्चय को समुच्चय S और T का संघ कहते हैं। इसे प्रतीक रूप में $S \cup T$ लिखते हैं, इसमें $\cup$ संघ का प्रतीक है।

अत: $S \cup T = \{x : x \in S \text{ या } x \in T \text{ या } (x \in S \text{ और } x \in T)\}$

उदाहरणार्थ यदि $S = \{1, 3, 5, 7, \cdots\}$

और $T = \{2, 4, 6, 8, \cdots\}$

तो $S \cup T =$ **N**, धन-संख्याओं का समुच्चय

पुन: यदि $S = \{1, 2, 3, 6\}$

और $T = \{1, 2, 4\}$

तो $S \cup T = \{1, 2, 3, 4, 6\}$

पाठक को ध्यान देना चाहिए कि एक बार लिखे गए अंग को दुबारा नहीं लिखा जाता। ऊपर के उदाहरण में यह देखा जा सकता है कि S और T दोनों के अंग '2' को एक ही बार लिया गया है।

प्रश्नावली

1. निम्नलिखित समुच्चयों के लिए $S \cup T$ निकालिए :

(i) $S=\{1, 2, 3,\}$, $T=\{1, 2, 3, 4\}$

(ii) $S=\{1, 3, 7\}$, $T=\{4, 6, 9,\}$

(iii) $S=\{1, 3, 5, 15\}$, $T=\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$.

2. प्रश्न एक के तीनों वर्गों के लिए $T \cup S$ निकालिए और देखिए कि

$$S \cup T = T \cup S.$$

3. तीन समुच्चयों

$$A = \{2, 4, 6\}$$
$$B = \{1, 7, 6\}$$
$$C = \{1, 8, 9\}$$

के लिए $(A \cup B) \cup C$ और $A \cup (B \cup C)$ निकालिए और परखिए कि $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$-

4. प्रश्न 2 और 3 में परखे गए समुच्चयों के संघ के नियमों का नाम लिखिए।

5. कोई तीन समुच्चय A, B और C लिखिए और $(A \cup B) \cup C$ और $(C \cup A) \cup B$ निकालिए।

सर्वनिष्ठ

कोई दो समुच्चय S और T लीजिए। इन दोनों में निहित सभी अंगों के समुच्चय को S और T दोनों समुच्चयों का सर्वनिष्ठ कहते हैं। इसे प्रतीक रूप में

$$S \cap T$$

लिखते हैं।

अतः $S \cap T = \{x : x \in S$ और $x \in T\}$.

उदाहरणार्थ यदि $S =$ खंड 36 और $T =$ खंड 24

तो $S = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$

और $T = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$

$\therefore$ $S \cap T = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$.

पुनः यदि $S = \{1, 3, 5\}$, $T = \{1, 5\}$

तो $S \cap T = \{1, 5\}$.

इसी प्रकार यदि $S = \{1, 3, 5\}$ और $T = \{4, 6, 7\}$

तो $S \cap T = \phi$,

क्योंकि कोई भी ऐसा अंग नहीं जो S और T दोनों में हो।

प्रश्नावली

1. पिछले भाग के प्रश्न 1 में दिए हुए समुच्चयों S और T के लिए $S \cap T$ और $T \cap S$ निकालिए और देखिए कि

$$S \cap T = T \cap S.$$

2. पिछले भाग के प्रश्न 3 में दिए हुए समुच्चयों A, B, C के लिए $(A \cap B) \cap C$ और $A \cap (B \cap C)$ निकालिए।

3. कोई तीन समुच्चय A, B, C लिखिए और निम्नलिखित को निकालिए।

(*i*) $A \cap (B \cup C)$ (*ii*) $(A \cap B) \cup (A \cap C)$

(*iii*) $A \cup (B \cap C)$ (*iv*) $(A \cup B) \cap (A \cup C)$

(*v*) $A \cup \phi$ (*vi*) $A \cap \phi$.

कथन—पीछे हमारा सव्यवहार सत्य, मिथ्या अथवा खुले कथनों से रहा है। नीचे हम ऐसे प्रतीकों का परिचय देंगे जिनसे कथनों और उनके आपसी संबंधों का प्रतिपादन सुविधापूर्वक हो जाता है।

मान लीजिए P और Q दो कथन हैं, तो कई बार ऐसी स्थिति होती है जिसमें हम कहते हैं कि

'यदि P तो Q,

जैसे उदाहरण रूप में

'यदि $a > b$ तो $a + c > b + c$'.

स्पष्टतः, यह तो माना ही है कि a, b, c सभी धन-संख्याएँ हैं।

प्रतीक रूप में हम लिखते हैं कि

$$P \Rightarrow Q$$

और इसे पढ़ते हैं P के फलस्वरूप है Q.

इस प्रकार उदाहरणार्थ किसी धन-संख्या x के लिए

$$x > 3 \Rightarrow x^2 > 3^2.$$

पुनः P और Q दो ऐसे कथन हो सकते हैं जिनमें P फलस्वरूप है Q के। प्रतीक रूप में हम

$$P \Leftarrow Q$$

लिखते हैं।

उदाहरण के लिए यदि a, b, c कोई धन-संख्याएँ हों तो गुणन के अपवर्तन नियम द्वारा

$$a = b \Leftarrow ac = bc.$$

प्राप्त होता है।

प्रायः P और Q ऐसे कथन भी होते हैं जिनके लिए

$$P \Rightarrow Q$$

और $$P \Leftarrow Q.$$

ऐसी स्थिति में हम $$P \Leftrightarrow Q$$

लिखते हैं और इसको

P के फलस्वरूप है Q और P फलस्वरूप है Q के पढ़ते हैं। तब हम यह भी कहते हैं कि कथन P और Q तुल्य हैं। उदाहरणार्थ, किन्हीं धन-संख्याओं a, b, c के लिए

$$a=b \Rightarrow ac=bc$$

और

$$a=b \Leftarrow ac=bc.$$

इनमें से पहला गुणन की परिभाषा का परिणाम है। दोनों को इकट्ठा करके

$$a=b \Leftrightarrow ac=bc$$

लिखते हैं। इस प्रकार किन्हीं धन-संख्याओं a, b, c के लिए कथन $a=b$ और $ac=bc$ तुल्य हैं।

प्रश्नावली

सिद्ध कीजिए कि

(i) $2x + 3 > 7 \Leftrightarrow x > 2$

(ii) $x+5=2x+1 \Leftrightarrow x=4.$

इस अध्याय में हम बहुधा 'सभी के लिए', 'विद्यमान है' और 'जहाँ' (जिसके लिए) तीन वाक्यांशों का प्रयोग करते रहे हैं। आगामी अध्यायों में भी पाठक इन तीनों वाक्यांशों का बहुधा प्रयोग देखेगा। इनके लिए निम्नलिखित तीन प्रतीक हैं :

'सभी के लिए'	$\forall$
'विद्यमान है'	$\exists$
'जहाँ' (जिसके लिए)	:

इस भाग की संकेत पद्धति द्वारा हम अध्याय के मूल परिणामों को एक स्वच्छ और संहत रूप में पुनः लिखने का प्रयत्न करेंगे। यह देखा जा सकता है कि विद्यार्थी के इन प्रतीकों के प्रयोग से एक बार परिचित हो जाने पर स्थान, समय और प्रयास की बहुत बचत होती है।

उदाहरण के लिए हमें ज्ञात है कि धन-संख्याओं में $a > b$ केवल तभी जब d कोई ऐसी धन-संख्या विद्यमान हो जिसके लिए

$$a=b+d.$$

पुनः यदि d कोई ऐसी धन-संख्या विद्यमान हो जिसके लिए

$$a=b+d$$

तो

$$a>b.$$

प्रतीक रूप में इस पूरे कथन को

$$a > b \Leftrightarrow \exists d \in \mathbf{N} : a=b+d \ \forall a, b \in \mathbf{N}$$

लिखते हैं। अर्थात् सभी धन-संख्याओं a और b के लिए 'a अधिक है b से' तब और केवल तभी जब d कोई ऐसी धन-संख्या विद्यमान हो जिसका b के साथ योगफल a के बराबर हो।

9. विभाजन कलन विधि

यह ध्यान रखना आवश्यक है कि धन-संख्याओं के समुच्चय **N** में ऐसा भी सम्भव है कि किन्हीं दो धन-संख्याओं में से कोई भी एक दूसरे का खंड न हो। जैसे धन-संख्याओं 4 और 6 में से न तो 4 खंड है 6 का और न 6 खंड है 4 का।

इसका अर्थ यह हुआ कि यदि a और b कोई धन-संख्याएँ दी हुई हों तो ऐसा भी हो सकता है कि a विभाजित न हो b से। पाठक को स्मरण होगा कि ऐसी स्थितियों में वह अपनी प्राथमिक और माध्यमिक कक्षाओं में a को b से विभाजित करने पर प्राप्त भागफल और शेष की बात करता रहा है।

नीचे हम इस विधि को यथारीति प्रस्तुत करने का प्रयत्न करेंगे।

दो धन-संख्याएँ 9 और 24 लीजिए। इनमें $24 > 9$, साथ ही 9 के अपवर्त्यों के समुच्चय में

$$1\times 9,\ 2\times 9,\ 3\times 9,\ 4\times 9, \ldots\ldots\ldots$$

संख्याएँ हैं। हम देखते हैं कि 24 इस समुच्चय का अंग नहीं है अर्थात् 24 अपवर्त्य नहीं है 9 का। हम यह भी देखते हैं कि प्रारंभ में अपवर्त्य 24 से न्यून है किन्तु एक विशेष अवस्था के बाद तक ऐसा अपवर्त्य मिल जाता है जो 24 से किंचित अधिक है। इससे एकदम पहले आने वाला अपवर्त्य 24 से न्यून सभी अपवर्त्यों में अधिकतम है। ये दोनों अपवर्त्य क्रमशः 3×9 और 2×9 हैं। वस्तुतः संख्या 24 संख्या 9 के दो क्रमागत अपवर्त्यों 2×9 और 3×9 के बीच में आ गई है। इस प्रकार

$$2\times 9 < 24 < 3\times 9.$$

और क्योंकि $$2\times 9 < 24$$

इसलिए 6 एक ऐसी धन-संख्या है जिसके लिए

$$24 = 9\times 2 + 6.$$

अतः भागफल और शेष कहलाने वाली दो धन-संख्याएँ क्रमशः 2 और 3 है।

यह ध्यान देने योग्य है कि संख्या 6 (शेष) अनिवार्यतः न्यून है संख्या 9 (भाजक) से।

पुनः दो संख्याएँ, जैसे, 20 और 3 लें। संख्या 3 के अपवर्त्यों के समुच्चय में

$$1\times 3,\ 2\times 3,\ 3\times 3,\ 4\times 3,\ 5\times 3,\ 6\times 3,\ 7\times 3,\ 8\times 3, \ldots\ldots$$

संख्याएँ हैं और 20 इस समुच्चय का अंग नहीं है। तथापि

$$6\times 3 < 20 < 7\times 3$$

और $$20 = 3\times 6 + 2.$$

यहां 6 भागफल है और 2 शेष है जो भाजक 3 से न्यून है।

प्रश्नावली

निम्नलिखित संख्या-युग्मों के लिए ऊपर के दो उदाहरणों की विधि को दोहराइए।

(*i*) 12 और 35 (*ii*) 19 और 215

(*iii*) 104 और 1387 (*iv*) 224 और 1345.

ऊपर के विवेचन द्वारा हम निम्नलिखित परिणाम पर पहुँचते हैं, इसको विभाजन कलन विधि कहते हैं।

प्रमेय : यदि a और b दो ऐसी धन-संख्याएँ हों जिनमें $b \neq 1$, $a > b$ और a विभाजित नहीं है b से तो दो संख्याएँ (अद्वितीय) q और r विद्यमान हैं जिनके लिए

$$a = bq + r \qquad , r < b.$$

उपपत्ति : b के अपवर्त्यों के समुच्चय में

$$b, 2b, 3b, 4b, \ldots\ldots\ldots$$

संख्याएँ हैं।

क्योंकि b खंड नहीं है a का इसलिए a उपर्युक्त समुच्चय का अंग नहीं है।

प्रारंभ में b के अपवर्त्य a से न्यून हैं किन्तु एक विशेष अवस्था पर पहुंचकर b का एक ऐसा अपवर्त्य प्राप्त होता है जो संख्या a से किंचित अधिक है।

मान लीजिए कि bq अधिकतम अपवर्त्य है b का जिसके लिए

$$qb < a$$

और $$(q+1)b > a$$

अतः $$qb < a < (q+1)b.$$

अब क्योंकि $qb < a$ इसलिए एक ऐसी धन-संख्या, जैसे, r विद्यमान है जिसके लिए

$$a = bq + r.$$

साथ ही क्योंकि $a < (q+1)b$

इसलिए $bq + r < bq + b$

अर्थात् $r < b.$

पुनः संख्या $q\,b$ और $(q+1)\,b$ को प्राप्त करने की विधि यह सिद्ध करती है कि q अद्वितीय है। और क्योंकि q अद्वितीय है इसके फलस्वरूप r भी अद्वितीय है। इतः प्रमेय।

प्रश्नावली

धन-संख्याओं के निम्नलिखित युग्मों के लिए भागफल और शेष निकालिए :

(*i*) 17, 3 (*ii*) 286, 11

(*iii*) 575, 17 (*iv*) 9087, 22

(*v*) 5555, 25 (*vi*) 7707, 77.

मूल परिणामों का संक्षेप

(*i*) $(a+b) = (b+a) \quad \forall \; a, b \in \mathbf{N}$ य क

(*ii*) $(a+b)+c = a+(b+c) \quad \forall \; a, b, c \in \mathbf{N}$ य स

(*iii*) $a \cdot b = b . a$ $\quad \forall\ a, b \in \mathbf{N}$ ग क

(*ix*) $(a\ b)\ c = a\ (b\ c)$ $\quad \forall\ a, b, c \in \mathbf{N}$ ग स

(*v*) $a \times 1 = a$ $\quad \forall\ a \in \mathbf{N}$ ग ए

(*vi*) $a\ (b + c) = a\ b + a\ c$ $\quad \forall\ a, b, c \in \mathbf{N}$ व

त्रिविकल्प नियम

(*vii*) किन्हीं दो धन-संख्याओं a और b के निम्नलिखित तीन विकल्पों में से एक और केवल एक ही होगा।

(1) $a = b$ (2) $a > b$ (3) $b > a$.

संक्रामकता नियम

viii $a > b$ और $b > c \Rightarrow a > c$ $\quad \forall\ a, b, c \in \mathbf{N}$

ix $a > b \Leftrightarrow a + c > b + c$ $\quad \forall\ a, b, c \in \mathbf{N}$

x $a > b \Leftrightarrow a\ c > b\ c$ $\quad \forall\ a, b, c \in \mathbf{N}$

xi $a = b \Leftrightarrow a + c = b + c$ $\quad \forall\ a, b, c \in \mathbf{N}$

xii $a = b \Leftrightarrow a\ c = b\ c$ $\quad \forall\ a, b, c \in \mathbf{N}$

सुक्रमण नियम

xiii **N** के किसी उपसमुच्चय S में सदैव न्यूनतम अंग होता है।

विभाजन कलन विधि

xiv यदि a और b दो ऐसी धन-संख्याएँ हों जिनमें $b \neq 1, a > b$ और a विभाजित नहीं हैं b से तो दो संख्याएँ (अद्वितीय) q और r विद्यमान हैं जिनके लिए

$$a = bq + r \qquad r < b.$$

10. निर्मेय

इस भाग में हम धन-संख्याओं के समुच्चय के नियमों का प्रयोग विभिन्न प्रकार के निर्मेयों को हल करने के लिए करेंगे। हम देखेंगे कि किसी निर्मेय को हल करने के लिए हम पहले उसे समीकरण अथवा असमता में रूपांतरित करेंगे। इनके हल से अंततः निर्मेय का हल मिल जाएगा।

कुछ निर्मेयों के उदाहरण देने से पूर्व हम साधारण भाषा के वाक्यों को गणितीय रूप में लिखने के और विलोमतः के भी उदाहरण देंगे। यह जानना रोचक होगा कि साधारण भाषा के वाक्य का गणितीय रूप एक ही होता है किन्तु गणितीय रूप का आख्यान एकाधिक रूप में भी हो सकता है।

उदाहरण

1. 'दो क्रमागत धन-संख्याओं का योगफल 67 है' को गणितीय भाषा में

$$x + (x + 1) = 67$$

के रूप में लिखा जा सकता है।

2. गणितीय रूप

$$x+(x+1)=67$$

का अनेक विभिन्न रूपों में आख्यान हो सकता है, जैसे,

(*i*) दो क्रमागत संख्याओं का योगफल 67 है ।

(*ii*) एक भाई दूसरे से 1 वर्ष बड़ा है और दोनों की आयु का योगफल 67 है ।

(*iii*) एक व्यक्ति की दो दिन की कुल कमाई 67 रु० है और वह दूसरे दिन पहले दिन से एक रुपया अधिक कमाता है ।

(*iv*) एक कार दो घंटे में 67 किलोमीटर जाती है और दूसरे घंटे में पहले घंटे से एक किलो मीटर अधिक जाती है ।

चर x

(*i*) पहली संख्या

(*ii*) छोटे भाई की आयु

(*iii*) व्यक्ति की पहले दिन की कमाई

(*iv*) पहले घंटे में कार द्वारा पार की गई दूरी

का निरूपण करता है ।

विद्यार्थी इस बात के महत्त्व को देखे कि एक ही समीकरण चार विभिन्न स्थितियों के अनुरूप रहा है । निस्संदेह ऐसे और भी बहुत से आख्यान हो सकते थे ।

प्रश्नावली

1. साधारण भाषा के निम्नलिखित वाक्यों को गणितीय भाषा में रूपांतरित कीजिए :

(*i*) दो क्रमागत संख्याओं का गुणनफल 18 है ।

(*ii*) दो संख्याओं का योगफल 57 है और इनमें बड़ी छोटी से 13 अधिक है ।

(*iii*) एक कक्षा में बालकों की संख्या बालिकाओं की संख्या से 13 अधिक है और कक्षा में विद्यार्थियों की कुल संख्या 57 है ।

(*iv*) पिता की आयु पुत्र की दुगुनी आयु से तीन वर्ष अधिक है और दोनों की कुल आयु 63 वर्ष है ।

(*v*) एक आयत का परिमाप 42 सें० मी० है और इसकी लम्बाई चौड़ाई से 3 सें०मी० अधिक है ।

2. प्रश्न 1 के प्रत्येक वर्ग में चर किसके लिए आता है ।

3. निम्नलिखित खुले कथनों का कम से कम दो विभिन्न रीतियों में आख्यान कीजिए :

(*i*) $x+5=43$ (*ii*) $x+(2x+1)=52$

(*iii*) $x+(x+1)<32$ (*iv*) $2x+2\,(x+1)=42$

(*v*) $x-5>3x-13.$

निर्मेय 1. 3 के दो क्रमागत अपवर्त्यों का योगफल 171 है। संख्याएँ निकालिए।

हल :

निर्मेय के अनुसार 3 के दो क्रमागत अपवर्त्यों का योगफल 171 है। 3 के इन अपवर्त्यों को निकालने के लिए हमें व्यंजकों की आवश्यकता होगी। हम यह मानकर चलते हैं कि इनमें से एक $3x$ है। तब दूसरा $3(x+1)$ होगा। और क्योंकि दोनों का योगफल 171 दिया हुआ है इसलिए

$$3x+3(x+1)=171$$
$$\Leftrightarrow \quad 6x+3=171$$
$$\Leftrightarrow \quad 6x+3=168+3$$
$$\Leftrightarrow \quad 6x=168$$
$$\Leftrightarrow \quad 6x=6\times 28$$
$$\Leftrightarrow \quad x=28$$

और तब $3x=84$ और $3(x+1)=87.$

अतः अपेक्षित संख्याएँ 84, 87 हैं।

निर्मेय 2. तीन घंटे में एक कार 150 किलोमीटर जाती है। यदि दूसरे घंटे में पार की गई दूरी पहले घंटे में पार की गई दूरी से दुगुनी हो और तीसरे घंटे में पार की गई दूरी दूसरे घंटे में पार की गई दूरी से 5 किलोमीटर कम हो तो पहले घंटे में पार की गई दूरी निकालिए।

हल :

मान लीजिए कि पहले घंटे में पार की गई दूरी x कि०मी० है। तब दूसरे घंटे में पार की गई दूरी $=2x$ कि०मी० और तीसरे घंटे में पार की गई दूरी $=(2x-5)$ कि० मी०।

क्योंकि तीन घंटे में पार की गई कुल दूरी 150 कि० मी० है। इसलिए

$$x+2x+(2x-5)=150$$
$$\Leftrightarrow \quad x+2x+(2x-5)+5=150+5$$
$$\Leftrightarrow \quad x+2x+2x=155$$
$$\Leftrightarrow \quad 5x=155$$
$$\Leftrightarrow \quad x=31.$$

अतः पहले घंटे में पार की गई दूरी 31 कि० मी० है।

निर्मेय 3. 500 रु० को अनिता, कविता और अनूपा में इस प्रकार बाँटिए कि कविता को अनिता के भाग के दुगुने से 20 रु० कम और अनूपा को कविता के भाग से 50 रु० अधिक मिलें।

हल :

मान लीजिए कि अनिता को x रु० मिलते हैं।

तब कविता को $(2x-20)$ रु०

और अनूपा को $[(2x-20)+50]$ रु० मिलेंगे।

इस प्रकार निर्मेय निम्नलिखित खुले कथन के अनुरूप हो गया है।

$$x+(2x-20)+(2x+30)=500$$
$$\Leftrightarrow \quad x+(2x+30)+(2x-20)=500$$
$$\Leftrightarrow \quad x+(2x+30)+2x=500+20=520$$
$$\Leftrightarrow \quad 5x+30=520=490+30$$
$$\Leftrightarrow \quad 5x=490$$
$$\Leftrightarrow \quad x=98.$$

अत: अनिता को 98 रु०, कविता को $(98\times2-20)$ रु० अर्थात् 176 रु० और अनूपा को $(176+50)$, अर्थात् 226 रु० मिलेंगे।

निर्मेय 4. एक वर्ग का सें० मी० में परिमाप इसके वर्ग सें० मी में क्षेत्रफल के बराबर है। वर्ग की भुजा निकालिए।

हल

मान लीजिए कि वर्ग की भुजा x सें०मी० है।

तब इसका परिमाप $4x$ सें०मी० होगा।

साथ ही वर्ग का क्षेत्रफल $=x.x$ वर्ग सें० मी०।

$$\therefore \quad 4x=x.x$$
$$\Leftrightarrow \quad 4=x.$$

अत: वर्ग की भुजा 4 सें० मी० होगी।

निर्मेय 5. एक आयत की भुजाएँ पूरे सें०मी० में ठीक नापी जा सकती हैं। इसकी लंबाई चौड़ाई से दुगुनी है और इसका क्षेत्रफल 46 वर्ग सें०मी० अथवा उससे कम है। इसकी लंबाई के सभी संभव मूल्य निकालिए।

हल

मान लीजिए कि आयत की चौड़ाई x सें०मी० है। तब इसकी लंबाई $2x$ सें०मी० होगी।

इस प्रकार आयत का क्षेत्रफल $x.\ (2x)$, अर्थात् $2x^2$ वर्ग सें०मी० होगा। क्योंकि यह क्षेत्रफल 46 वर्ग सें०मी० अथवा इससे कम है, इसीलिए

$$2x^2\leqslant46$$
$$\Leftrightarrow \quad 2x^2\leqslant2\times23$$
$$\Leftrightarrow \quad x^2\leqslant23.$$

इस संबंध का समाधान करने वाले x के मूल्यों का समुच्चय स्पष्टत:

$$\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$$

है।

आयत की लंबाई 2, 4, 6 या 8 सें०मी० होगी।

सत्यापन विद्यार्थी प्रत्येक परिमाप के सही होने का सत्यापन करे।

प्रश्नावली

1. ऐसी क्रमागत संख्याएँ निकालिए जिनका योगफल 57 हो।
2. ऐसी दो क्रमागत समय संख्याएँ निकालिए जिनका योगफल 144 हो।
3. ऐसी दो क्रमागत विषम सख्याएँ निकालिए जिनका योगफल 68 हो।
4. 8 के दो क्रमागत अपवर्त्यों का योगफल 168 है। संख्याएँ निकालिए।
5. ऐसी तीन क्रमागत संख्याएँ निकालिए जिनका योगफल 81 हो।
6. ऐसी तीन क्रमागत सम संख्याएँ निकालिए जिनका योगफल 108 हो।
7. ऐसी तीन क्रमागत विषय संख्याएँ निकालिए जिनका योगफल 327 हो।

8. दो संख्याओं में से बड़ी, छोटी के दुगुने से 17 अधिक है। यदि उनका योगफल 104 हो तो दोनों संख्याएँ निकालिए।

9. एक संख्या का सात गुणा, दूसरी संख्या के तेरह गुणा से 12 कम है। संख्याएँ निकालिए।

10. एक संख्या के दुगुने में 13 के योग का, और उसी संख्या के तिगुने में 5 के योग का फल बराबर है। संख्याएँ निकालिए।

11. दो संख्याओं में बड़ी, छोटी से 13 अधिक है। उनका योगफल 27 से कम होना आवश्यक है। छोटी संख्या के सभी संभव मूल्यों का समुच्चय निकालिए।

12. किसी संख्या के तिगुने और 9 का योगफल उसी संख्या के पाँच गुणे और 7 के अंतर से अधिक है। इस संख्या के सभी संभव मूल्यों का समुच्चय निकालिए।

13. क्या किसी संख्या के दुगुने और 3 का योगफल उसी संख्या के सात गुणे से अधिक हो सकता है?

14. क्या किसी संख्या के तिगुने और 6 का योगफल उसी संख्या के नौ गुणे से अधिक हो सकता है?

15. एक कार दो घंटे में कुल 100 कि०मी० चली। यदि वह दूसरे घंटे में पहले घंटे में पार की गई दूरी के तिगुने से 20 कि० मी० कम चली हो तो वह पहले घंटे में कितनी चली?

16. एक वर्ग का परिमाप 28 सें०मी० से कम है। यदि भुजा पूरे सें०मी० में मापी जा सके तो उसकी सभी संभव लंबाइयाँ निकालिए।

17. एक वर्ग की भुजा पूरे सें०मी० में मापी जा सकती है। यदि परिमाप 24 सें० मी० से कम और 12 सें०मी० से अधिक हो तो वर्ग की भुजा की सभी संभव लंबाइयाँ निकालिए।

18. एक आयत का परिमाप 14 सें० मी० है। यदि आयत की लंबाई चौड़ाई के दुगुने से 2 सें० मी० कम हो तो उसकी चौड़ाई निकालिए।

19. एक त्रिभुज का परिमाप 36 सें० मी० है। यदि इसकी एक भुजा दूसरी से 5 सें० मी० कम और तीसरी भुजा दूसरी भुजा से 8 सें० मी० अधिक हो तो त्रिभुज की तीनों भुजाएँ निकालिए।

20. यदि तीन क्रमागत संख्याएँ किसी त्रिभुज के तीन कोणों के अंश-माप हों तो संख्याएँ निकालिए।

21. एक पात्र का घनफल दूसरे के घनफल से 10 लि० कम है। दोनों मिलकर 92 लि० धारण कर सकते हैं। दोनों पात्रों का पृथक्-पृथक् घनफल क्या होगा?

22. राम और श्याम के पास 50 रु० हैं। यदि राम के पास श्याम के रुपयों के दुगुने से 4 कम हों तो श्याम के पास कितने रुपए हैं।

23. राम, श्याम और कृष्ण में 300 रु० इस प्रकार बाँटिए कि राम को श्याम से 20 रु० अधिक और श्याम को कृष्ण से दुगुने मिलें।

24. एक कक्षा में 50 विद्यार्थी हैं। लड़कियों की संख्या लड़कों की संख्या के चौगुने से 5 कम है। लड़के लड़कियों की संख्या निकालिए।

25. 45 विद्यार्थियों की कक्षा में लड़कों की संख्या लड़कियों की संख्या के तिगुने से 5 अधिक है। लड़के लड़कियों की संख्या निकालिए।

26. पिता पुत्र की आयु का योगफल 65 वर्ष है। अब से 5 वर्ष के पश्चात् पिता की आयु पुत्र की आय से दुगनी हो जाएगी। उनकी वर्तमान आयु निकालिए।

27. पिता पुत्र की आयु का योगफल 60 वर्ष है। तीन वर्ष पहले पिता की आयु पुत्र की आयु से दुगुनी थी। उनकी वर्तमान आयु निकालिए।

28. एक संख्या का दहाई अंक इकाई अंक के दुगने से 1 कम है। यदि अंकों का योगफल 8 हो तो संख्या निकालिए।

29. दो अंकों वाली एक संख्या का दहाई अंक इकाई अंक से दुगुना है। यह संख्या, अंकों को उल्लटने पर प्राप्त होने वाली संख्या से 18 अधिक है। संख्या निकालिए।

सिंहावलोकन प्रश्नावली

1. यदि

$$A=\{2, 7, 3, 9, 8, 13\}$$
$$B=\{5, 7, 8, 17, 9\}$$
$$C=\{6, 4, 12, 14, 16\}$$

तो निम्नलिखित समुच्चय क्या होंगे ?

$$A\cup B,\ B\cup C,\ C\cup A,$$
$$A\cap B,\ B\cap C,\ C\cap A,$$
$$A\cup (B\cap C),\ A\cap (B\cup C)$$
$$(A\cup B)\cap (A\cup C),\ (A\cap B)\cup (A\cap C)$$

2. यदि

$$L = \{x : x \text{ खंड है } 45 \text{ का}\}$$
$$M = \{x : x \text{ खंड है } 63 \text{ का}\}$$
$$N = \{x : x \text{ खंड है } 120 \text{ का}\}$$
$$P = \{x : x \text{ खंड है } 270 \text{ का}\}$$

तो निम्नलिखित समुच्चय क्या होंगे ?

$$L \cap M,\ M \cap P,\ L \cap (M \cap N)$$
$$(L \cap B) \cap (N \cap P)$$

3. यदि

$$P = \{x : x \text{ अपवर्त्य है } 6 \text{ का}\}$$
$$Q = \{x : x \text{ अपवर्त्य है } 8 \text{ का}\}$$

तो समुच्चय $P \cap Q$

क्या होगा ?

4. यदि x का प्रभाव-क्षेत्र **N** हो तो x के किन मूल्यों के लिए निम्नलिलिखित व्यंजक सार्थक हैं ?

$$(i)\ 4-x \qquad (ii)\ x-(2x-8)$$
$$(iii)\ (3x-7)-x.$$

6. यदि x का प्रभावक्षेत्र **N** हो तो x के किन मूल्यों के लिए निम्नलिखित व्यंजक सार्थक हैं ।

$$(i)\ (20 \div x)-x \qquad (ii)\ (x \div 3) \div 5$$
$$(iii)\ \{(x-7) \div 3\} \div 2$$

6. सिद्ध कीजिए कि

$$a^2+b^2 \geqslant 2ab \quad \forall\ a, b \in \mathbf{N}$$

7. सिद्ध कीजिए कि

$$a > b \text{ और } c > d \Rightarrow ac+bd > ad+bc \quad a,b,c,d \in \mathbf{N}$$

8. क्या 2^{10} अधिक है अथवा न्यून है 1,000 से ?

9. यदि

$$x+y=101 \text{ और } x-y<2$$

तो सिद्ध कीजिए कि $x=51.$

10 यदि

$$4x+3y=63 \text{ और } x<5$$

तो सिद्ध कीजिए कि

$$y > 14$$

11. धन-संख्याओं x, y के सभी संभव युग्म दीजिए, जिनके लिए

$$x - y < 6 \text{ और } x + y < 14.$$

12. यदि

$$x \geqslant y + 4 \text{ और } y = z - 3$$

तो सिद्ध कीजिए कि

$$x \geqslant z + 1$$

13. सिद्ध कीजिए कि

$$(ab) \div c = a\,(b \div c)$$

वे प्रतिबंध भी लिखिए जिनके अंतगर्त दोनों पक्षों के व्यंजक सार्थक हैं।

14 सिद्ध कीजिए कि ऐसी धन-संख्याएँ a, b, c विद्यमान हैं जिनके लिए

$$(a^b)^c \neq a^{(bc)}$$

15. यदि x कोई धन-संख्या हो तो निम्नलिखित को x के लिए हल कीजिए।

(i) $x + 56 = 74$	(ii) $42 + x = 93$
(iii) $25 - x = 12$	(iv) $3x + 7 = 16$
(v) $x - 7 = 7$	(vi) $7 - 4x = 13$
(vii) $9 - 5x = 3$	(viii) $(x \div 2) + 5 = 8$
(ix) $(x \div 3) + 7 = 6$	(x) $4x - 5 = 8$
(xi) $13 - 7x = 2$	(xii) $x^2 = 9$
(xiii) $x^2 + 5 = 20$	(xiv) $x^2 - 7 = 18$
(xv) $25 - x^2 = 21$	

16. यदि x धन-संख्याओं के समुच्चय में निहित हो, तो निम्नलिखित असमताओं को x लिए हल कीजिए।

(i) $x - 8 > 3$	(ii) $x - 3 < 11$
(iii) $x + 11 < 11$	(iv) $x + 22 < 23$
(v) $27 + x < 39$	(vi) $2x + 5 < 19$
(vii) $7x - 3 < 24$	(viii) $10x - 8 > 12$
(ix) $3x - 5 > 12$	(x) $3 + 8x \geqslant 11$
(xi) $27 + 5 \geqslant 37$	(xii) $13 - 4x \geqslant 5$
(xiii) $x \div 7 \geqslant 10$	(xiv) $x \div 3 \leqslant 7$
(xv) $(x \div 3) + 7 \leqslant 12$	(xvi) $3 \div x \leqslant 2$

(*xvii*) $(3\div x)+7\leqslant 13$ (*xviii*) $x^2\geqslant 64$

(*xix*) $25-x^2\geqslant 15$ (*xx*) $x^2-11\geqslant 4$

(*xxi*) $x^2+5\leqslant 5$ (*xxii*) $2x+5\neq 5x+7$

(*xxiii*) $3x+11\neq 4x+4$ (*xxiv*) $5x+13\ngtr 6x+7$

(*xxv*) $4x+5\ngtr 3x+11$ (*xxvi*) $5x+3\nless 8x+2$

(*xxvii*) $11x+1\nless 7x+25$ (*xxviii*) $3x+7\nless 5x+3$

17. यदि x और y धन-संख्याओं के समुच्चय के अंग हों तो x, y के लिए निम्नलिखित को हल कीजिए।

(*i*) $x+y=7$ (*ii*) $7x+3y=15$

(*iii*) $x-3y=4$ (*iv*) $x-3y=3$

(*v*) $x^2+y^2=1$ (*vi*) $x+3\leqslant y$

(*vii*) $y-3\geqslant x$ (*viii*) $2x+3y\leqslant 25$

(*ix*) $x^2+y^2\geqslant 12$ (*x*) $x^2+3y^2=10$.

18. 7 के उन दो क्रमागत अपवर्त्यों को निकालिए जिनका योगफल 329 है।

19. एक आयत का परिमाप 56 सें० मी० है। यदि इसकी लंबाई, चौड़ाई के दुगुने से 4 सें० मी० अधिक हो तो आयत की लंबाई और चौड़ाई निकालिए।

20. मोहन, सोहन और ओम् में 200 रु० इस प्रकार बाँटिए कि मोहन को सोहन से 10 रु० अधिक और ओम् को सोहन के रुपयों के दुगुने से 20 रु० कम मिलें।

21. पिता पुत्र की आयु का अंतर 25 वर्ष है। अब से दस वर्ष पश्चात् पिता की आयु पुत्र की आयु से दुगुनी होगी। पिता की वर्तमान आयु निकालिए।

22. दो संख्याओं वाली एक संख्या का दहाई अंक इकाई अंक से 4 अधिक है और दोनों अंकों का योगफल 14 है। संख्या निकालिए।

23. एक वर्ग की प्रत्येक भुजा पूरे मीटरों में मापी जा सकती हैं। यदि वर्ग का क्षेत्रफल 10 वर्ग मी० से अधिक और 100 वर्ग मी० से कम हो तो भुजाओं की लंबाई के सभी संभव मूल्य निकालिए।

24. 20 टॉफ़ियों के पैकेट में से सीता और कृष्णा को टॉफ़ियाँ देने की सभी संभव रीतियाँ बताइए जब कि सीता को कृष्णा द्वारा प्राप्त टॉफ़ियों के दुगुने से 2 टॉफ़ियाँ कम मिलें।

25. तीन अंकों वाली एक संख्या में दहाई अंक इकाई अंक से दुगुना और सैकड़ा अंक इकाई अंक से तिगुना है। इकाई अंक और सैकड़ा अंक के परस्पर विनिमय से प्राप्त संख्या पहली संख्या से 594 कम है। संख्या निकालिए।

2

प्रारम्भिक संख्या सिद्धांत N में विभाज्यता

11. भूमिका

हम देख चुके हैं कि यदि a और b दो धन-संख्याएँ हों तो c कोई ऐसी धन-संख्याएँ हो भी सकती है और नहीं भी हो सकती जिसके लिए

$$a = bc$$

और यदि दो धन-संख्याओं a, b के लिए c एक ऐसी धन-संख्या विद्यमान हो जिसके लिए $a = bc$, तो हम

$$a \div b = c$$

लिखते हैं और कहते हैं कि a विभाज्य है b से और a को b से भाग देने पर भागफल c आता है।

इस प्रकार यह देखा जाएगा कि धन-संख्याओं के समुच्चय के प्रसंग में प्रतीक

$$a \div b$$

तब और तभी सार्थक है जब a विभाज्य है b से।

अतः धन-संख्याओं के समुच्चय के प्रसंग में प्रत्येक व्यंजक

$$6 \div 2,\ 16 \div 4,\ 18 \div 3$$

सार्थक है, किन्तु कोई भी व्यंजक

$$6 \div 4,\ 16 \div 5,\ 3 \div 6$$

सार्थक नहीं है।

12. विभाज्यता संबंध

यदि a विभाज्य है b से तो हम

$$b | a$$

लिखते हैं। यहाँ b और a के बीच में आने वाली रेखा उदग्र है आनत नहीं।

प्रतीक

$$b|a$$

को a विभाज्य है b से

पढ़ते हैं।

उदाहरणार्थ, क्योंकि 6 विभाज्य है 3 से इसलिए हम

$$3|6$$

लिखते हैं।

पुन: 30 विभाज्य है 5 से इसलिए हम

$$5|30$$

लिखते हैं।

प्रतीक

$$b|a$$

को पढ़ने के बहुत से विभिन्न और वैकल्पिक रूप हो सकते हैं जो नीचे दिए जा रहे हैं। किन्तु ऐसा करने के पूर्व हम निम्नलिखित धारणाओं का निर्देश करेंगे :

(i) धन-संख्या का खंड, (ii) धन-संख्या का अपवर्त्य।

खंड अपवर्त्य यदि a विभाज्य है b से तो हम कह सकते हैं कि b खंड है a का अथवा a अपवर्त्य है b का।

इस प्रकार

b खंड है a का $\Leftrightarrow$ a अपवर्त्य है b का

प्राय: खंड को **भाजक** भी कहते हैं। इस प्रकार

a अपवर्त्य है b का $\Leftrightarrow$ b भाजक है a का

अत: a विभाज्य है b से का सूचक प्रतीक

$$b|a$$

निम्नलिखित रूपों में भी पढ़ा जा सकता है।

(i) b खंड है a का

(ii) b भाजक है a का

(iii) a अपवर्त्य है b का.

भ्रम के परिहरण और विचारों के स्थिरीकरण के लिए हम सदैव प्रतीक

$$b|a$$

को b खंड है a का पढ़ेंगे।

टिप्पणी—विद्यार्थी को स्मरण होगा कि पहले अध्याय में उसका परिचय धन-संख्याओं के समुच्चय में 'अधिक है…से' संबंध के साथ कराया गया था। यहाँ उसका परिचय **N** में एक और संबंध

'खंड है'''का' के साथ कराया जा रहा है। प्रतीक रूप में संबंध 'अधिक है'''से' का सूचक '>' था और अब हम संबंध 'खंड है ''का' को '|' द्वारा सूचित करेंगे।

यदि b खंड नहीं है a का तो हम प्रतीक रूप में

$$b \nmid a$$

लिखेंगे।

'खंड नहीं है'''का' के प्रतीक '∤' और योग के प्रतीक '+' में उत्पन्न होने वाले भ्रम के प्रति विद्यार्थी को सावधान रहना चाहिए। 'खंड नहीं है'''का' के प्रतीक '∤' में क्षैतिज रेखा उदग्र रेखा को मध्य में नहीं काटती।

इस विवेचन के आधार पर हम देखते हैं कि

$$3|6,\ 4|12,\ 5|15,\ 3|3,\ 1|3$$

और $$4\nmid 6,\ 5\nmid 12,\ 6\nmid 15,\ 3\nmid 2,\ 3\nmid 4.$$

उदाहरण

संख्याओं 18 और 7 के खंडों के समुच्चय निकालिए।

यह सरलता से देखा जा सकता है कि 18 के खंडों का समुच्चय

$$\{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$$

और 9 के खंडों का समुच्चय

$$\{1, 7\}$$

है।

प्रश्नावली

1. निम्नलिखित में से कौन-से कथन सत्य है?

(*i*) $15|45$ (*ii*) $36|12$ (*iii*) $15\nmid 25$
(*iv*) $1|27$ (*v*) $23|1$ (*vi*) $11\nmid 33$
(*vii*) $19\nmid 38$ (*viii*) $23|69$ (*ix*) $14|56$
(*x*) $15\nmid 27$.

2. निम्नलिखित धन-संख्याओं में से प्रत्येक के खंडों का समुच्चय निकालिए -

(*i*) 12 (*ii*) 48 (*iii*) 100
(*iv*) 41 (*v*) 125 (*xi*) 71
(*xii*) 300 (*viii*) 61 (*ix*) 123
(*x*) 240.

3. कोई आठ धन-संख्याएँ और उनके खंडों के समुच्चय दीजिए।

4. निम्नलिखित धन-संख्याओं में से प्रत्येक के अपवर्त्यों का समुच्चय लिखिए।

(*i*) 2	(*ii*) 5	(*iii*) 7
(*iv*) 6	(*v*) 3	(*vi*) 4
(*vii*) 11	(*viii*) 9	(*ix*) 10
(*x*) 1.		

5. प्रश्न 2 और प्रश्न 4 के प्रत्येक समुच्चय का न्यूनतम और यदि हो तो अधिकतम अंग लिखिए।

प्रेक्षण 1. हम देखते हैं कि किसी संख्या के खंडों के **समुच्चय का न्यूनतम अंग सदैव** '1' और अधिकतम अंग स्वयं संख्या होगी। ऐसा समुच्चय सदैव सांत होता है।

2. किसी संख्या के अपवर्त्यों के समुच्चय का न्यूनतम अंग स्वयं संख्या होगी और इसका अधिकतम अंग नहीं होता। खंडों के सांत समुच्चय के विपरीत अपवर्त्यों का समुच्चय अनंत होता है।

3. प्रेक्षण 1 के आधार पर हम देखते हैं कि किसी संख्या का कोई खंड उससे अधिक नहीं होता। नीचे हम इस परिणाम को यथारीति लिखेंगे और सिद्ध करेंगे।

प्रमेय—किसी संख्या का कोई खंड उससे अधिक नहीं होता।

प्रतीक रूप में

$$a|b \Rightarrow a \leqslant b.$$

उपपत्ति—प्रतीक $a \leqslant b$ का अर्थ यह है कि a न्यून है b से अथवा बराबर है b के **अर्थात्** a अधिक नहीं है b से। क्योंकि $a|b$ इसलिए c एक ऐसी संख्या होगी जिसके लिए

$$b = ac.$$

यदि संभव हो तो मान लीजिए कि $a > b.$

अब

$$a > b \Rightarrow ac > bc$$
$$\Rightarrow b > bc$$
$$\Leftrightarrow b.1 > bc$$
$$\Rightarrow 1 > c.$$

किन्तु $1 > c$ असंभव है क्योंकि 1 न्यूनतम धन-संख्या है। इस प्रकार एक विरोध उत्पन्न हो गया है और इसलिए

$$a \leqslant b$$

अनिवार्य है।

'खंड है···का' संबंध

किन्हीं दो धन-संख्याओं a, b के लिए

या तो a खंड है b का

और या a खंड नहीं है b का

होता है । अर्थात् प्रतीक रूप में

या $a \nmid b$ अथवा $a \dagger b$

होता है ।

इस प्रकार धन संख्याओं के युग्मों के एक संबंध की परिभाषा हो गई । इसे हम धन-संख्याओं के समुच्चय में एक द्विमय संबंध की परिभाषा भी कह सकते हैं । हम कहते हैं कि धन-संख्याओं के समुच्चय N में खंड है···का एक संबंध है । जिस प्रकार पहले 'अधिक है···से' संबंध के नियमों का अध्ययन किया गया था, उसी प्रकार अब हम 'खंड है···का' संबंध के नियमों का अध्ययन नीचे करेंगे । परंतु ऐसा करने से पहले हम निम्नलिखित प्रश्न का परीक्षण करते हैं :

क्या संख्यओं का कोई ऐसा युग्म है जिसमें युग्म का प्रत्येक अंग दूसरे अंग का खंड हो ?

संख्या 3 और 3 के युग्म को देखिए। क्योंकि

$$3.1=3$$

इसलिए हम जानते हैं कि इनमें से प्रत्येक दूसरे का खंड है ।

वस्तुत: किसी धन-संख्या a के लिए युग्म (a, a) का प्रत्येक अंग दूसरे का खंड होता है । इस लिए यदि हम अपने आप से प्रश्न करें कि "क्या विभिन्न संख्याओं के इस प्रकार के एक अथवा अनेक युग्म होते हैं ?" तो इसका उत्तर यह होगा कि 'धन-संख्यओं के ऐसे युग्म नहीं होते ।

'खंड है···का' संबंध के नियम

1. प्रत्येक धन-संख्या स्वयं अपना खंड है और 1 प्रत्येक धन-संख्या का खंड है ।

किसी भी धन-संख्या a के लिए

$$a=a.1 \Rightarrow \begin{cases} a \mid a \\ 1 \mid a \end{cases}$$

'प्रत्येक धन-संख्या स्वयं अपना खंड है' नियम को यह कह कर व्यक्त किया जाता है कि धन-संख्याओं के समुच्चय N में 'खंड है···का' सम्बंध परावर्ती हैं । नामपद्धति 'परावर्ती' तर्क संगत है क्योंकि प्रत्येक धन-संख्या स्वयं अपने से संबद्ध है ।

उपप्रमेय—संख्या 1 का एकमात्र खंड स्वयं ही 1 है ।

2. किन्हीं तीन धन-संख्याओं a, b, c के लिए, यदि a खंड है b का और b खंड है c का तो a खंड है c का ।

प्रतीक रूप में

$$a \mid b \text{ और } b \mid c \Rightarrow a \mid c$$

उपपत्ति—क्योंकि a खंड है b का, इसलिए d कोई ऐसी धन-संख्या होगी जिसके लिए

$$b=a\,d \qquad \ldots(1)$$

पुन: क्योंकि b खंड है c का, इसलिए e कोई ऐसी धन-संख्या होगी जिसके लिए

$$c = b\,e \qquad \ldots(2)$$

अब (1) और (2) के फलस्वरूप

$$c = (a\,d)\;e = a\,(d\,e) \qquad \ldots(3)$$

और (3) के फलस्वरूप a खंड है c का।

अत: नियम सिद्ध हुआ।

उपपत्ति को निम्नलिखित रूप में भी प्रस्तुत किया जा सकता है। यहाँ प्रतीकों का अत्यधिक प्रयोग है।

$$\left.\begin{array}{l} a \mid b \Rightarrow \exists\ d : b = a\,d \\ b \mid c \Rightarrow \exists\ e : c = b\ e \end{array}\right\} \Rightarrow c = (a\,d)\ e \Rightarrow c = a\ (d\ e) \Rightarrow a \mid c.$$

'खंड है···का' संबंध की संक्रामकता : उपर्युक्त नियम को ध्यान में रखते हुए हम यह कहते हैं कि धन-संख्याओं के समुच्चय **N** में 'खंड···है का' संबंध संक्रामक है। यह नामपद्धति तर्क संगत है क्योंकि 'खंड है··का' संबंध का एक धन-संख्या से दूसरी में स्थानांतरण किया जा रहा है।

उदाहरण

$$(i)\ \ 3 \mid 6,\ \ 6 \mid 12 \Rightarrow 3 \mid 12$$

$$(ii)\ \ 5 \mid 15,\ 15 \mid 60 \Rightarrow 5 \mid 60$$

$$(iii)\ \ 8 \mid 32,\ 32 \mid 96 \Rightarrow 8 \mid 96$$

'खंड है···का' संबंध की संक्रामता के परिणामस्वरूप प्राप्त होने वाले इन सभी फलों के सही होने का सत्यापन सीधा भी किया जा सकता है।

3 यदि a खंड है b का और b खंड है a का, तो a और b बराबर हैं। प्रतीकरूप में

$$a \mid b,\ b \mid a \Rightarrow a = b.$$

उपपत्ति—क्योंकि a खंड है b का, इसलिए c कोई ऐसी धन-संख्या होगी जिसके लिए

$$b = ac. \qquad \ldots(1)$$

पुन: क्योंकि b खंड है a का, इसलिए d कोई ऐसी धन-संख्या होगी जिसके लिए

$$a = bd. \qquad \ldots(2)$$

अब (1) और (2) के फलस्वरूप

$$\begin{aligned} b = (bd)\ c &\Rightarrow b = b\ (dc) \\ &\Rightarrow b.1 = b\ (dc) \\ &\Rightarrow\ \ 1 = dc \end{aligned}$$

और $1 = d\ c$ के फलस्वरूप c और d खंड हैं 1 के I किन्तु संख्या 1 का एकमात्र खंड स्वयं 1 है। इसलिए

$$c = 1,\ d = 1.$$

अब (1) अथवा (2) से $a=b$

प्राप्त होता है।

उपपत्ति का प्रदर्शन निम्नलिखित रूप में भी किया जा सकता है :

$$\left.\begin{array}{l} a \mid b \Rightarrow \exists\ c : b=ac \\ b \mid a \Rightarrow \exists\ d : a=bd \end{array}\right\} \Rightarrow \quad b=(bd)\ c$$

$$\Rightarrow b.1=b\ (dc)$$

$$\Rightarrow 1\ =d\ c$$

$$\Rightarrow c \mid 1,\ d \mid 1$$

$$\Rightarrow c=1,\ d=1$$

अत: $a=b$

'खड है···का' संबंध की प्रतिसममिति—'खंड है···का' संबंध के उपर्युक्तनियम के आधार पर हम कहते हैं कि धन-संख्याओं के समुच्चय **N** में 'खंड है···का' संबंध प्रतिसममित है।

उदाहरण

सिद्ध कीजिए कि **N** में संबंध $\geqslant$ प्रतिसममित है।

यहाँ $a \geqslant b$ का अर्थ या तो $a>b$ या $a=b$ है।

उपपत्ति— $a \geqslant b \Rightarrow$ या तो $a>b$ या $a=b$

और $b \geqslant a \Rightarrow$ या तो $b>a$ या $b=a$

इस प्रकार $a \geqslant b$ और $b \geqslant a \Rightarrow$ (या तो $a>b$, या $a=b$)

और (या तो $b>a$ या $b=a$)

यह सरलता पूर्वक देखा जा सकता है कि निम्नलिखित में से कोई भी संभव नहीं।

(*i*) $a>b$ और $b=a$

(*ii*) $a=b$ और $b>a$

(*iii*) $a>b$ और $b>a$

वस्तुत:, त्रिविकल्प नियम से यह फल तुरंत प्राप्त होता है। अत:, जब $a \geqslant b$ और $b \geqslant a$ तो हमारे पास केवल ($a=b$ और $b=a$) विकल्प ही रह जाता है।

$$\therefore \quad a \geqslant b,\ b \geqslant a \Rightarrow a=b$$

प्रश्नावली

सिद्ध कीजिए कि धन-संख्याओं के समुच्चय में '$\leqslant$' एक प्रति-सममित संबंध है।

यहाँ $a \leqslant b$ का अर्थ या तो $a<b$ या $a=b$ है।

13. 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11 से विभाज्यता के निकष

इस भाग में हम 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11 से धन-संख्याओं की विभाज्यता की कसौटियों पर विचार करेंगे। यद्यपि विवेचन केवल उदाहरणों द्वारा होगा तथापि पाठक को उन सूत्रों की तर्क-

संगति समझाने का प्रयत्न किया गया है जिनसे उसका पूर्व-परिचय भी हो सकता है। साथ ही उसे प्रयत्न से कसौटियों के खरेपन को सुविधापूर्वक समझने में भी सहायता मिलेगी। यह भी स्मरण रखना होगा कि औपचारिक उपपत्ति की विधियाँ निम्नलिखित उदाहरणों की विधियों के ठीक समान हैं। जिस मूल परिमाण द्वारा हम इन सूत्रों को प्राप्त करते हैं, वह इस प्रकार है, 'यदि कोई धन-संख्या a तीन धन-संख्याओं b, c और $b+c$ में से किन्हीं दो का खंड हो तो वह तीसरी धन-संख्या का भी खंड होगी।' निस्संदेह यह परिणाम खंड की धारणा और वितरण-नियम से तुरंत प्राप्त हो जाता है।

प्रतीक रूप में इस परिणाम को इस प्रकार लिख सकते हैं :

$$
\begin{aligned}
&(i)\ a \mid b,\ a \mid c && \Leftrightarrow a \mid (b+c)\\
&(ii)\ a \mid b,\ a \mid (b+c) && \Rightarrow a \mid c\\
&(iii)\ a \mid c,\ a \mid (b+c) && \Rightarrow a \mid c
\end{aligned}
$$

वस्तुत:

$$
\left.\begin{aligned}
a \mid b \Rightarrow \exists d : b = ad\\
a \mid c \Rightarrow \exists e : c = ae
\end{aligned}\right\} \Rightarrow b+c = ad+ae
$$

$$
\Rightarrow b+c = a\,(d+e)
$$

$$
\Rightarrow a \mid (b+c).
$$

पुन:

$$
\left.\begin{aligned}
&a \mid b && \Rightarrow \exists d && : b = ad\\
&a \mid (b+c) && \Rightarrow \exists e && : (b+c) = ae
\end{aligned}\right\} \Rightarrow \{(b+c)-b\} = ae-ad
$$

$$
\Rightarrow \quad c = a(e-d)
$$

$$
\Rightarrow a \mid c
$$

पाठक को चाहिए कि वह कथन (iii) की सत्यता ठीक इसी प्रकार देखले।
उदाहरणार्थ, 7 खंड है 14 और 21 दोनों का और इसलिए 7 खंड है (14+21) अर्थात् 35 का। पुन: 7 खंड है 14 और 49 अर्थात् (14+35) दोनों का और इसलिए 7 खंड है 35 का।

I. **2 से विभाज्यता** — धन-संख्या

3528

को लीजिए।

इस संख्या को हम

$$352 \times 10 + 8 \qquad \ldots(1)$$

के रूप में भी लिख सकते हैं।

अब हमें ज्ञात है कि 2 खंड है 10 का और इसलिए 2 खंड होगा 352×10 का। इसलिए 2 खंड होगा संख्या 3528 का तब और तभी जब 2 खंड हो 8 का। और हम जानते हैं कि 2 खंड है 8 का।

अतः 2 खंड है 3528 का।

किसी संख्या की 2 से विभाज्यता का परीक्षण करने के लिए हमें केवल इतना ही जानना होगा कि इकाई अंक 2 से विभाज्य है या नहीं। अतः कोई संख्या तब और तभी 2 से विभाज्य होती है जबकि उसका इकाई अंक 2, 4, 6, 8 या शून्य हो।

यहाँ यह ध्यान देने योग्य है कि यदि अंतिम अंक शून्य हो तो संख्या दो से विभाज्य है क्योंकि 10 इसका एक खंड होगा। जैसे

$$3520 = 352 \times 10$$

प्रश्नावली

निम्नलिखित में से कौन-सी संख्याएँ 2 से विभाज्य हैं ?

(*i*) 23	(*ii*) 306	(*iii*) 235
(*iv*) 356	(*v*) 5040	(*vi*) 7132
(*vii*) 3721	(*viii*) 3009	(*ix*) 1138
(*x*) 93244.		

II. **4 से विभाज्यता** —संख्या

30778

को लीजिए

इसे

$$307 \times 100 + 78 \qquad (2)$$

के रूप में भी लिखा जा सकता है।

अब हमें ज्ञात है कि $4 \mid 100$ और इसलिए 4 खंड है 307×100 का भी। इस प्रकार यह जानने के लिए कि दी हुई संख्या 4 से विभाज्य है हमें यह देखना होगा कि 78 विभाज्य है 4 से अथवा नहीं वस्तुतः हम जानते हैं कि 78 विभाज्य नहीं है 4 से। इसलिए दी हुई संख्या भी 4 से विभाज्य नहीं है।

अतः यह जानने के लिए कि कोई संख्या 4 से विभाज्य है अथवा नहीं, उपर्युक्त उदाहरण की अन्तिम दो अंकों से प्राप्त संख्या की 4 से विभाज्यता जानना ही पर्याप्त है।

प्रश्नावली

1. प्रत्येक संख्या को उपर्युक्त रूप (2) के समान लिखकर यह परखिए कि निम्नलिखित में से कौन-सी संख्याएँ 4 से विभाज्य हैं।

(*i*) 5434	(*ii*) 4256	(*iii*) 2330
(*iv*) 9786	(*v*) 5004.	

2. निम्नलिखित में से कौन-से कथन सत्य हैं ?

(*i*) $4 \nmid 9786$ (*ii*) $4 \mid 7838$ (*iii*) $4 \mid 2780$
(*iv*) $4 \nmid 864324$ (*v*) $4 \mid 11128$ (*vi*) $4 \nmid 57896$.

III. **8 से विभाज्यता**—संख्या 212456 लीजिए। इसे

$$213 \times 1000 + 456 \quad \ldots(3)$$

के रूप में भी लिख सकते हैं।

क्योंकि 8 खंड है 1000 का इसलिए 213×1000 विभाज्य है 8 से। इसलिए दी हुई संख्या तब और तभी 8 से विभाज्य होगी जब संख्या 456 विभाज्य हो 8 से। साथ ही हम देखते हैं कि संख्या 456 विभाज्य है 8 से। इस प्रकार दी हुई संख्या 8 से विभाज्य है।

अतः कोई धन-संख्या तब और तभी 8 से विभाज्य होगी जब उपर्युक्त उदाहरण में प्राप्त 456 की भाँति अंतिम तीन अंकों से प्राप्त संख्या 8 से विभाज्य हो :

प्रश्नावली

निम्नलिखित में से कौन-से कथन सत्य हैं ?

(*i*) $8 \mid 26$ (*ii*) $8 \mid 4328$ (*iii*) $8 \nmid 3248$
(*iv*) $8 \mid 3184$ (*v*) $8 \mid 453266$ (*vi*) $8 \mid 432024$
(*vii*) $8 \mid 123312$ (*viii*) $8 \mid 255516$ (*ix*) $8 \mid 751364$
(*x*) $8 \nmid 2156304$.

IV. **10 से विभाज्यता**—10 किसी संख्या का खंड तब और तभी होगा जब उसका अंतिम अंग शून्य हो। जैसे 2340 तो विभाज्य है 10 से परंतु 2304 नहीं।

प्रश्नावली

निम्नलिखित में से कौन-सी संख्याएँ 10 से विभाज्य हैं ?

(*i*) 3490 (*ii*) 1000 (*iii*) 2483
(*iv*) 2585 (*v*) 4230.

V. **5 से विभाज्यता**—कोई धन-संख्या जैसे, 235773 लीजिए।

इसे

$$23577 \times 10 + 3 \quad \ldots(5)$$

के रूप में भी लिखा जा सकता है।

क्योंकि 10 विभाज्य है 5 से इसलिए संख्या 23577×10 विभाज्य है 5 से।

इस प्रकार दी हुई धन-संख्या तब और तभी विभाज्य है 5 से जब 3 विभाज्य हो 5 से। किंतु $5 \nmid 3$ इसलिए दी हुई संख्या 5 से विभाज्य नहीं है।

अतः उपर्युक्त विवेचन के आधार पर हम देखते हैं कि कोई धन-संख्या तब और तभी 5 से विभाज्य होगी जब इसका अंतिम अंक 5 अथवा शून्य हो।

प्रश्नावली

परखिए कि निम्नलिखित कथन सत्य हैं अथवा मिथ्या ।

(*i*) $5 \mid 325$ (*ii*) $5 \nmid 496$ (*iii*) $5 \nmid 700$
(*iv*) $5 \mid 234$ (*v*) $5 \mid 1250$ (*vi*) $5 \mid 3249$
(*vii*) $5 \nmid 5005$ (*viii*) $5 \nmid 1001$ (*ix*) $5 \mid 53005$
(*x*) $5 \nmid 509030$.

VI. **3 से विभाज्यता**—संख्या

$$354826$$

लीजिए । इसे

$$3(99999+1)+5(9999+1)+4(999+1)+8(99+1)+2(9+1)+6$$

के रूप में भी लिख सकते हैं ।

योग के क्रम-विनिमेय और साहचर्य नियमों द्वारा इस संख्या को

अन्ततः

$$[3\times 99999+5\times 9999+4\times 999+8\times 99+2\times 9] + [3+5+4+8+2+6] \quad \ldots(6)$$

के रूप में भी लिख सकते हैं ।

अब 3 खंड है

$$9,\ 99,\ 999,\ 9999,\ 99999$$

में से प्रत्येक संख्या का । इसलिए दी हुई संख्या तब और तभी 3 से विभाज्य होगी जब संख्या

$$3+5+4+8+2+6$$

विभाज्य हो संख्या 3 से ।

अतः कोई संख्या तब और तभी 3 से विभाज्य होगी जब उसके अंकों का योगफल 3 से विभाज्य हो । उपर्युक्त उदाहरण में अंकों का योगफल 28, अपवर्त्य नहीं है 3 का और इसलिए संख्या विभाज्य नहीं है 3 से ।

टिप्पणी—यदि कुछ अंक शून्य हों तो अंकों का योगफल लिखते समय हम उन्हें छोड़ देते हैं ।

प्रश्नावली

निम्नलिखित संख्याओं को उपर्युक्त रूप में (6) के समान व्यक्त कीजिए और बताइए कि कौन-सी 3 से विभाज्य नहीं ।

(*i*) 2307 (*ii*) 4298 (*iii*) 23456
(*iv*) 9867 (*v*) 7083 (*vi*) 8735

(*vii*) 10578 (*viii*) 32178 (*ix*) 10305
(*x*) 32178

VII. **9 से विभाज्यता :** 3 से विभाज्यता के प्रकरण के ठीक समान ही किसी संख्या, जैसे 34978

को

$$[3\times 9999+4\times 999+9\times 99+7\times 9]+3+4+9+7+8 \qquad \cdots\cdots(7)$$

के रूप में भी लिख सकते हैं ।

अब कोष्ठकों के बीच लिखी गई सभी संख्याओं में से प्रत्येक 9 से विभाज्य है और इसलिए दी हुई संख्या तब और तभी 9 से विभाज्य होगी जब

$$3+4+9+7+8$$

9 से विभाज्य हो अर्थात् तब और तभी जब 31 विभाज्य हो 9 से । किन्तु 31 विभाज्य नहीं है 9 से इसलिए दी हुई संख्या 9 से विभाज्य नहीं है ।

अतः कोई संख्या तब और तभी 9 से विभाज्य होगी जब इसके अंकों का योगफल 9 से विभाज्य हो ।

VI की टिप्पणी यहाँ भी लागू होती है ।

प्रश्नावली

निम्नलिखित संख्याओं को उपर्युक्त रूप (7) के समान लिखिए और बताइए कि इनमें से कौन-सी 9 से विभाज्य हैं ।

(*i*) 34625 (*ii*) 38502 (*iii*) 325786
(*iv*) 149387 (*v*) 208575 (*vi*) 206037
(*vii*) 960209 (*viii*) 704256 (*ix*) 2505210
(*x*) 6403057.

VIII. **6 से विभाज्यता :** कोई संख्या तब और तभी 6 से विभाज्य होगी जब वह 3 और 2 दोनों से विभाज्य हो । इस प्रकार हमें 6 से विभाज्यता परखने के लिए 2 और 3 से विभाज्यता की कसौटियों को लागू करना होगा ।

अतः कोई संख्या तब और तभी 6 से विभाज्य होगी जब इसका अंतिम अंक 0, 2, 4, 6, 8 में से ही हो और अंकों का योगफल 3 से विभाज्य हो ।

प्रश्नावली

निम्नलिखित में से कौन-से कथन सत्य और कौन-से मिथ्या हैं ।

(*i*) $6 \mid 324$ (*ii*) $6 \mid 5301$ (*iii*) $6 \nmid 40744$
(*iv*) $6 \nmid 78000$ (*v*) $6 \nmid 73501$ (*vi*) $6 \nmid 60372$
(*vii*) $6 \nmid 92057$ (*viii*) $6 \mid 74582$ (*ix*) $6 \mid 827430$
(*x*) $6 \mid 85067352$.

IX. **11 से विभाज्यता** : संख्या

$$745843$$

को लीजिए। इसे

$$7\ (100001-1)+4\ (9999+1)+5\ (1001-1)+8\ (99+1)+4\ (11-1)+3$$

अथवा $7\ (9091\times 11-1)+4\ (909\times 11+1)+5\ (91\times 11-1)+8\ (9\times 11+1)$
$+4\ (11-1)+3$

के रूप में भी लिख सकते हैं।

अंततः इस संख्या को

$$[7\times 9091\times 11+4\times 909\times 11+5\times 91\times 11+8\times 9\times 11+4\times 11] -[(7+5+4)-(4+8+3)] \qquad \ldots(9)$$

के रूप में लिखा जा सकता है।

अब पहले कोष्ठक की प्रत्येक संख्या 11 से विभाज्य है इसलिए दी हुई संख्या तब और तभी 11 से विभाज्य होगी जब संख्या $(7+5+4)-(4+8+3)$ विभाज्य हो 11 से। क्योंकि ऐसा नहीं है, इसलिए हम इस निष्कर्ष पर पहुँचते हैं कि दी हुई संख्या 11 से विभाज्य नहीं है।

अतः कोई संख्या तब और तभी 11 से विभाज्य होगी जब एकांतर अंकों के पृथक्-पृथक् योगफलों में से अधिक का न्यून से अंतर 11 से विभाज्य हो। साथ ही एकांतर अंकों के योगफल बराबर होने पर भी संख्या 11 से विभाज्य होगी।

प्रश्नावली

1. संख्याओं को उपर्युक्त रूप (9) के समान व्यक्त करके परखिए कि इनमें से कौन-सी 11 से विभाज्य हैं।

(*i*) 704 (*ii*) 587 (*iii*) 2[illegible]84
(*iv*) 8569 (*v*) 5985 (*vi*) 6017
(*vii*) 17592 (*viii*) 38986 (*ix*) 420409
(*x*) 735483.

2. निम्नलिखित कथनों में से कौन-से सत्य और कौन-से मिथ्या हैं ?

(*i*) $8 \mid 354078$ (*ii*) $9 \nmid 4593708$ (*iii*) $6 \nmid 4578004$
(*iv*) $11 \nmid 5485321$ (*v*) $4 \mid 5783486$ (*vi*) $9 \nmid 2874125$
(*vii*) $11 \mid 705349$ (*viii*) $6 \mid 503874$ (*ix*) $4 \nmid 9407382$
(*x*) $8 \nmid 1509344$.

14. अभाज्य संख्याएँ, भाज्य संख्याएँ

1 से विभिन्न कोई धन-संख्या a लीजिए। हम देख चुके हैं कि यदि $a\neq 1$ कोई भी धन-संख्या हो तब इसके कम से कम दो विभिन्न खंड, 1 और स्वयं a तो होते ही हैं। अब, कुछ ऐसी धन-संख्याएँ

होती हैं जिनके केवल दो खंड, 1 और स्वयं संख्या होते हैं। उदाहरण के लिए धन-संख्या

$$11$$

लीजिए। इसका 1 और 11 के अतिरिक्त कोई और खंड नहीं है।

निश्चय ही ऐसी भी धन-संख्याएं a हैं जिनके खंड 1 और a के अतिरिक्त भी होते हैं। उदाहरणार्थ

$$a=12$$

लीजिए। इस धन-संख्या के खंड 1 और 12 के अतिरिक्त

$$2, 3, 4, 6$$

भी हैं।

इस विमर्श से निम्नलिखित परिभाषाएँ प्राप्त होती हैं।

अभाज्य संख्याएँ

परिभाषा—1 से विभिन्न किसी धन-संख्या को अभाज्य तभी कहते हैं जब 1 और स्वयं संख्या के अतिरिक्त उसका कोई खंड न हो।

उदाहरण के लिए $\qquad 2, 3, 5, 7, 11$

अभाज्य संख्याएँ हैं।

भाज्य संख्याएँ

परिभाषा—1 से विभिन्न किसी धन-संख्या को भाज्य तभी कहते हैं जब वह अभाज्य न हो।

अतः कोई धन-संख्या भाज्य तभी होती है जब वह 1 से विभिन्न हो और उसके कम से कम तीन विभिन्न खंड हों।

उदाहरण के लिए

$$4, 6, 8, 9, 10, 12$$

भाज्य संख्याएँ हैं।

इसके फलस्वरूप यदि a कोई धन-संख्या हो तो निम्नलिखित विकल्पों में से एक और केवल एक ही होगा

(*i*) $a=1$, $\qquad$ (*ii*) a अभाज्य है, $\qquad$ (*iii*) a भाज्य है।

प्रश्नावली

1. दस अभाज्य संख्याएँ लिखिए।
2. बारह भाज्य संख्याएँ लिखिए।
3. क्या कोई ऐसी धन-संख्या है जो न अभाज्य हो और न भाज्य ? क्या ऐसी संख्या अद्वितीय है ? ऐसी सभी धन-संख्याएँ लिखिए जो न अभाज्य हैं न भाज्य।
4. क्या सभी अभाज्य संख्याएँ विषम होती हैं ?

5. सभी सम अभाज्यों का समुच्चय लिखिए।

6. बताइए कि निम्नलिखित कथन सत्य है अथवा मिथ्या।
"सम अभाज्य संख्या एक और केवल एक ही है।"

7. उन सभी अभाज्यों को लिखिए जो निम्नलिखित से न्यून अथवा उनके बराबर हैं।

(*i*) 100 (*ii*) 500 (*iii*) 1000.

8. 'n' के निम्नलिखित मूल्य होने पर उन सभी अभाज्य संख्याओं की संख्या बताइए जो धन-संख्या 'n' से न्यून अथवा उसके बराबर हैं।

(*i*) 1 (*ii*) 2 (*iii*) 5
(*iv*) 10 (*v*) 14 (*vi*) 30.

9. किसी धन-संख्या 'n' से न्यून अथवा उसके बराबर सभी धन-संख्याओं का गुणनफल क्रमगुणित n कहलाता है और इसे प्रतीक

$$n\,!$$

द्वारा सूचित करते हैं।

उदाहरण के लिए

$$1\,! = 1$$
$$2\,! = 1.2 = 2$$
$$3\,! = 1.2.3 = 6$$
$$4\,! = 1.2.3.4 = 24$$
$$5\,! = 1.2.3.4.5 = 120.$$

सत्यापित कीजिए कि P के निम्नलिखित अभाज्य मूल्यों के लिए p खंड है $(p-1)\,!+1$ का।

(*i*) 2 (*ii*) 3 (*iii*) 5
(*iv*) 7 (*v*) 11 (*vi*) 13.

टिप्पणी—कॉलेज स्तर के आगामी अध्ययन में विद्यार्थी यह सिद्ध करेगा कि किसी भी अभाज्य संख्या p के लिए, p खंड है $(p-1)\,!+1$ का। वह यह भी सिद्ध करेगा कि p तभी अभाज्य है जब वह $(P-1)!+1$ का खंड हो। यहाँ, वह अभाज्य संख्या p के कुछ विशेष मूल्यों के लिए केवल कथन की सत्यता को सत्यापित कर रहा है।

10. p के निम्नलिखित भाज्य मूल्यों के लिए सत्यापित कीजिए कि p खंड नहीं है $(p-1)!+1$ का।

(*i*) 4 (*ii*) 6 (*iii*) 8
(*iv*) 9 (*v*) 10 (*vi*) 12.

स्वभावतः निम्नलिखित दो प्रश्न रोचक हैं :

(*i*) अभाज्य संख्याओं का समुच्चय सांत है अथवा अनंत ?

(*ii*) भाज्य संख्याओं का समुच्चय सांत है अथवा अनंत ?

यह सरलतापूर्वक देखा जा सकता है कि दूसरे प्रश्न का उत्तर यह है कि

भाज्य संख्याओं का समुच्चय अनंत है।

वस्तुतः यदि हम कोई धन-संख्या, जैसे 4, लें तो अनंत समुच्चय

$$\{ 4^n : n \in \mathbf{N} \} \qquad \ldots(1)$$

का प्रत्येक अंग भाज्य है । इस समुच्चय में 4 के सभी विभिन्न घात है। इस प्रसंग में कोई भ्रम न हो इसलिए हम निस्संदेह यह कहते हैं कि (1) सभी भाज्य संख्याओं का समुच्चय नहीं है। वस्तुतः समुच्चय (1), न आने वाली सभी भाज्य संख्याओं का समुच्चय स्वयं अनंत है।

यह जानना भी रोचक है कि अभाज्य संख्याओं का समुच्चय भी अनंत है।. इस महत्वपूर्ण फल की उपपत्ति हम थोड़ा बाद में देंगे । अभाज्य संख्याओं के समुच्चय के अनंत होने के फलस्वरूप किसी दी हुई अभाज्य संख्या से अधिक भी एक अभाज्य संख्या अवश्य होगी । अतः हम कहते हैं कि अभाज्य संख्याओं का समुच्चय

$$\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23\ldots\ldots\}$$

है। बिन्दु इस बात को सूचित करते हैं कि 23 से अधिक भी अभाज्य संख्याएँ हैं।

प्रमेय—1 से विभिन्न प्रत्येक धन-संख्या का अभाज्य खंड होता है।

उपपत्ति—$a \neq 1$ कोई धन-संख्या लीजिए। हम सिद्ध करेंगे कि एक ऐसी अभाज्य संख्या विद्यमान है जो a का खंड है।

अब यदि a स्वयं अभाज्य हो तो प्रमेय सिद्ध हो गया क्योंकि अभाज्य संख्या a स्वयं अपना खंड है।

अब मान लीजिए कि a एक भाज्य संख्या है। इसके भाज्य होने से 1 और स्वयं अपने से विभिन्न इसका कोई खंड, जैसे b, अवश्य होगा अर्थात्

$$b \mid a,\ b \neq 1,\ b \neq a.$$

यदि b अभाज्य हो तो बात यहीं समाप्त हो गयी। वैकल्पिक स्थिति में 1 और b से विभिन्न c एक ऐसी संख्या होगी जिसके लिए

$$c \mid b.$$

निस्संदेह

$$c < b,\ b < a.$$

यदि c अभाज्य हो तो भी बात समाप्त हो गयी। वैकल्पिक स्थिति में 1 और c से विभिन्न d एक ऐसी संख्या होगी जिसके लिए

$$d \mid c.$$

पुनः

$$d<c<b<a.$$

इस वैकल्पिक स्थिति की संभावना अनंत नहीं हो सकती और कुछ निश्चित चरणों के पश्चात् एक ऐसी संख्या प्राप्त होगी जो अभाज्य हो। विचारों के स्थिरीकरण के लिए मान लीजिए कि

$$f \mid e,\ e \mid d,\ d \mid c,\ c \mid b,\ b \mid a$$

और यहाँ f अभाज्य है। 'खंड है···का' संबंध की संक्रामकता के फलस्वरूप $f \mid a$ और f अभाज्य है।

टिप्पणी—उपपत्ति इस बात पर केन्द्रित है कि हम पूर्व चरण पर प्राप्त खंड का खंड उत्तरोत्तर प्राप्त करें और ध्यान दें कि कुछ निश्चित चरणों के पश्चात् एक अभाज्य खंड आ जाता है। उदाहरणार्थ

$$a=400.$$

लीजिए। 400 के कई खंडों में से हम कोई एक, जैसे 100, चुन लेते हैं और लिखते हैं

$$b=100.$$

अब, 100 के कई खंडों में से कोई एक, जैसे 20, चुन लेते हैं और लिखते हैं

$$c=20.$$

फिर, 20 के विभिन्न खंडों में से कोई एक, जैसे खंड 4, चुन लेते हैं और लिखते हैं

$$d=4.$$

अंततः हम देखते हैं कि 2 अभाज्य खंड है $d=4$ का। इस प्रकार हमें कथनों की निम्नलिखित शृंखला प्राप्त होती है

$$2 \mid 4,\ 4 \mid 20,\ 20 \mid 100,\ 100 \mid 400,$$

जिसके फलस्वरूप 'खंड है···का' संबंध की संक्रामकता के कारण

$$2 \mid 400.$$

निस्संदेह प्रत्येक चरण पर हम कोई भी खंड चुन सकते हैं और विभिन्न अवस्थाओं पर विभिन्न चुनावों द्वारा, दी हुई संख्या के विभिन्न अभाज्य खंड प्राप्त हो सकते हैं। इस प्रकार दी हुई संख्या 400 के प्रसंग में हम विभाज्यता संबंधों की निम्नलिखित शृंखला भी प्राप्त कर सकते हैं

$$5 \mid 25,\ 25 \mid 100,\ 100 \mid 400.$$

इसके फलस्वरूप अभाज्य संख्या 5 खंड है 400 का।

पाठक विभिन्न संख्याएँ, जैसे

162, 375, 399

लेकर इस विधि का अभ्यास कर सकता है।

प्रमेय—अभाज्य संख्याओं का समुच्चय अनंत है।

उपपत्ति—हम मानते हैं कि यह कथन मिथ्या है अर्थात् हम मानते हैं कि इस कथन का निषेध नाम्ना

'अभाज्य संख्याओं का समुच्चय अनंत नहीं है'

अथवा तुल्य रूप में

'अभाज्य संख्याओं का समुच्चय सांत है'

सत्य है।

अभाज्य संख्याओं का समुच्चय सांत होने के कारण कोई अधिकतम अभाज्य संख्या अवश्य होगी। मान लीजिए कि q अधिकतम अभाज्य संख्या है।

सभी अभाज्य संख्याओं का गुणनफल, नाम्ना, संख्या

$$b = 2.\ 3.\ 5.\ 7.\ \ldots\ldots q \qquad \ldots(1)$$

लीजिए।

अब हम

$$a = b + 1 \qquad \ldots(2)$$

लिखते हैं। इस प्रकार संख्या a सभी अभाज्य संख्याओं के गुणनफल से एक अधिक है। निश्चय ही

$$a \neq 1.$$

संख्या a का अभाज्य खंड अवश्य होगा। मान लीजिए p अभाज्य खंड है a का। निश्चय ही p, गुणनफल (1) में आने वाली संख्याओं

$$2,\ 3,\ 5,\ 7,\ \ldots\ldots,\ q$$

में से एक संख्या है। अब

$$p \mid a \text{ और } p \mid b$$

के फलस्वरूप

$$p \mid (a-b).$$

क्योंकि $a-b=1$ इसलिए यह निष्कर्ष प्राप्त होता है कि

$$p \mid 1$$

अर्थात् p खंड है 1 का।

निस्संदेह p कोई भी अभाज्य संख्या खंड नहीं है 1 का क्योंकि 1 का खंड संख्या 1 ही है। इस प्रकार हम मिथ्या कथन पर पहुँच जाते हैं। इसलिए 'अभाज्यों की संख्या अनंत नहीं है' कथन सत्य नहीं हो सकता। अतः अभाज्य संख्याओं का समुच्चय अनंत है।

टिप्पणी—क्योंकि अभाज्य संख्याओं का समुच्चय अनंत है इसलिए किसी दी हुई अभाज्य संख्या से अधिक अभाज्य संख्याएँ अवश्य होती हैं। इस प्रकार

अभाज्य संख्याओं की सूची

$$2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ldots\ldots$$

अंतहीन है। हमें इतना ही करना है कि धन-संख्याओं की सूची

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ldots\ldots$$

में से अभाज्य संख्याएँ चुन लें। यह ध्यान देने योग्य है कि संख्याओं के बढ़ने के साथ-साथ किसी दी हुई संख्या के अभाज्य होने या न होने का निश्चय करना कठिन होता जाता है।

उदाहरणार्थ संख्या

$$3570397643$$

के अभाज्य होने या न होने का निश्चय करना दुष्कर कार्य है। वस्तुतः किसी प्रस्तावित संख्या का अभाज्य होना सिद्ध करने के लिए गणितज्ञों ने समय-समय पर समस्याएँ रखी हैं, इनमें से बहुत-सी समस्याएँ आज भी चुनौती बनी हुई हैं।

15. महत्तम समापवर्तक

दो धन-संख्याओं के महत्तम समापवर्तक की धारणा का परिचय हम एक उदाहरण द्वारा दे रहे हैं।

दो धन-संख्याओं

$$45, 63$$

को लीजिए।। इनके खंडों के समुच्चय क्रमशः

$$\{1, 3, 5, 9, 15, 45\}$$
$$\{1, 3, 7, 9, 21, 63\}$$

हैं। इन दोनों समुच्चयों का सर्वनिष्ठ दी हुई संख्याओं के समापवर्तकों का समुच्चय

$$\{1, 3, 9\}$$

है।

अंततः समापवर्तकों के इस समुच्चय का महत्तम अंग 9 है। इस संख्या 9 को दो संख्याओं 45, 63 का महत्तम समापवर्तक कहते हैं, संक्षेप में इसे म स द्वारा सूचित करते हैं।

अब एक और उदाहरण लीजिए।
मान लीजिए कि 12,20 कोई दो धन-संख्याएँ हैं।

इनके खंडों के समुच्चय

$$\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}, \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$$

हैं। इन दोनों समुच्चयों का सर्वनिष्ठ दी हुई संख्याओं के समापवर्तकों का समुच्चय

$$\{1, 2, 4\}$$

है।
क्योंकि 4 समापवर्तकों के समुच्चय का महत्तम है इसलिए संख्याओं 12,20 का म स 4 है।

प्रश्नावली

धन-संख्याओं के निम्नलिखित युग्मों के लिए उपर्युक्त विधि अपनाकर उनका म स निकालिए :

(*i*) 36, 64 (*ii*) 30, 135 (*iii*) 28, 56
(*iv*) 21, 98 (*v*) 16, 45 (*vi*) 84, 128.

दो संख्याओं का महत्तम समापवर्तक

परिभाषा—दो संख्याओं के समापवर्तकों में से अधिकतम को उन संख्याओं का महत्तम समापवर्तक कहते हैं।

संक्षेप में दो संख्याओं के महत्तम समापवर्तक को प्रायः म स द्वारा सूचित करते हैं।

धन-संख्याओं के विशेष युग्मों से संबंधित उपर्युक्त विधि व्यक्त करती है कि किन्हीं दो संख्याओं का म स होता है और यह अद्वितीय भी होता है।

दो धन संख्याएँ a, b लीजिए और मान लीजिए कि इनके खंडों के समुच्चय क्रमशः A, B हैं। तब

$$A \cap B$$

संख्याओं a, b से समापवर्तकों के समुच्चय को सूचित करता है। यहाँ A और B पिछले अध्याय में लिखित खंड a और खंड b को सूचित करते हैं।

अब संख्याओं a, b से संबद्ध दोनों समुच्चय A, B सांत हैं। अतः इनका सर्वनिष्ठ

$$A \cap B$$

भी सांत है। साथ ही यह सर्वनिष्ठ खाली समुच्चय नहीं है। वस्तुतः हम कम से कम एक धन-संख्या 1 जानते हैं जो दोनों समुच्चयों A और B से निहित होने के कारण

$$A \cap B$$

में भी निहित है। इस प्रकार हम देखते हैं कि समापवर्तकों का समुच्चय $A \cap B$ एक अ-रिक्त सांत समुच्चय है। अतः इसमें एक अधिकतम अंग है और वह अधिकतम संख्या परिभाषा के अनुसार a और b का अद्वितीय म स है।

अतः यह सिद्ध हुआ कि किन्हीं दो धन-संख्याओं का अद्वितीय महत्तम समापवर्तक होता है।

टिप्पणी—ऊपर सिद्ध किया गया प्रमेय सैद्धांतिक महत्व का है क्यों कि प्रमेय के अनुसार हम विश्वस्त हैं कि किन्हीं दो धन-संख्याओं का म स होता है और किसी भी सम्भव विधि द्वारा निकालने पर परिणाम अभिन्न रहते हैं। अब प्रश्न किन्हीं दो दी हुई धन-संख्याओं का म स निकालने का रह जाता है। निश्चय ही जब संख्याएँ बहुत बड़ी न हों तो हम उपपत्ति में अपनाई गई विधि कार्यान्वित कर सकते हैं। इसी विधि को ही पहले

(*i*) 45, 63 और (*ii*) 12, 20

युग्मों के म स निकालने के लिए अपनाया गया था।

जिन धन-संख्याओं का म स हम निकालना चाहते हैं, वे बड़ी हों तो स्पष्टतः यह विधि बहुत जटिल हो जाएगी।

सौभाग्य से, किन्हीं दो धन-संख्याओं का म स निकालने के लिए एक सरलतर विधि भी है। दो संख्याओं का म स निकालने की बारंबार विभाजन की इस विधि को 'यूक्लिड-कलनविधि' कहते हैं। इस कलनविधि का उल्लेख लगभग 2300 वर्ष पूर्व 'यूक्लिड के मूल तत्वों' में हुआ है। हम अब इसी का वर्णन करेंगे।

म स के निर्धारण की कलन विधि

मान लीजिए कि

$$a, b$$

कोई दो धन-संख्याएँ हैं और

$$a > b.$$

अब यदि b स्वयं खंड हो a का तो a, b का म स b है क्योंकि b के खंडों का महत्तम b ही है और यह a का भी खंड है।

मान लीजिए कि b खंड नहीं है a का।

विभाजन कलन विधि के अनुसार q, r ऐसी धन-संख्याएँ होंगी जिनके लिए

$$a = bq + r, \; r < b. \qquad \ldots(i)$$

हम यह सिद्ध करेंगे कि

a और b का म स

और

b और r का म स

बराबर हैं।

यह तभी होगा जब a और b के समापवर्तकों का समुच्चय b और r के समापवर्तकों का समुच्चय भी हो अर्थात् a और b का कोई समापवर्तक b और r का भी समापवर्तक हो और विलोमतः भी।

मान लीजिए कि x कोई समापवर्तक है a और b का। तब u और v दो ऐसी धन-संख्यएँ होंगी जिनके लिए

$$a = xu, \; b = xv. \qquad \ldots(ii)$$

(i) और (ii) के फलस्वरूप

$$xu = xvq + r$$
$$\Rightarrow \quad r = x(u - vq)$$
$$\Rightarrow \quad x \text{ खंड है } r \text{ का.}$$

इस प्रकार a और b का कोई समापवर्तक x, समापवर्तक होगा b और r का भी।

अब मान लीजिए कि y कोई समापवर्तक है b और r का। तब s, t कोई दो ऐसी धन-संख्याएँ होंगी जिनके लिए

$$b = ys, \; r = yt. \qquad \ldots(iii)$$

(i) और (iii) के फलस्वरूप

$$a = ysq + yt = y(sq + t)$$
$$\Rightarrow \quad y \text{ खंड है } a \text{ का.}$$

इस प्रकार b और r का कोई समापवर्तक y, समापवर्तक होगा a, b का भी।

अतः a और b का **म स** b, r का भी **म स** है, यहाँ a को b से विभाजित करने पर r शेष रहता है।

इस महत्वपूर्ण सिद्धांत से किन्हीं दो धन-संख्याओं का **म स** निकालने के लिए आवश्यक संकेत मिल जाता है :

युग्म (a, b) के लिए अपनाई गई विधि को अब हम युग्म (b, r) के लिए अपनाते हैं, इस प्रकार हम b को r से भाग देते हैं। यदि b को r से विभाजित करने पर शेष r प्राप्त हो तो, जैसा ऊपर देखा गया है, r, r_1 का **म स** b, r के **म स** के बराबर है और इसलिए a, b के **म स** के बराबर भी होगा।

यह ध्यान देने योग्य है कि $r_1 < r$.

यदि r खंड हो r का तो r_1, r का **म स** r, होने के फलस्वरूप a, b का **म स** r_1 होगा। किन्तु यदि r_1, खंड नहीं हो r का तो हम पुनः r को r_1, से भाग देकर शेष, जैसे r_2, प्राप्त करते हैं, इसमें $r_2 < r_1$ क्योंकि शेष कम होते जाते हैं। इसलिए यह विधि कुछ चरणों के पश्चात् अवश्य समाप्त होगी अर्थात् एक ऐसा शेष h प्राप्त होगा जो अपने से पूर्व शेष, जैसे k का खंड है। h और k का **म स** h होगा और क्योंकि यह a और b के **म स** के बराबर है, इसलिए a और b का **म स** h है।

इस विधि का उदाहरण नीचे दिया जा रहा है। दो संख्याएँ

$$15844, 13281$$

लीजिए।

उत्तरोत्तर विभाजन के फलस्वरूप

$$15844 = 13281 \times 1 + 2563$$
$$13281 = 2563 \times 5 + 466$$
$$2563 = 466 \times 5 + 233$$
$$466 = 233 \times 2$$

और इसलिए अंतिम शेष 233 जो अपने से पूर्व शेष 466 का खंड है, दी हुई संख्याओं का **म स** है।

इस विधि का निम्नलिखित रूप में विन्यास कर सकते हैं :

	2	5	5	1
	466	2563	13281	15844
233	466	2330	12815	13281
		233	466	2563

2. संख्याओं

$$1404, 1014$$

को लीजिए।

अब

$$1404 = 1014 \times 1 + 390$$
$$1014 = 390 \times 2 + 234$$
$$390 = 234 \times 1 + 156$$
$$234 = 156 \times 1 + 78$$
$$156 = 78 \times 2.$$

अंतिम शेष 78 जो अपने से पूर्व शेष 156 का खंड है अपेक्षित **म स** है ।

विधि का प्रदर्शन निम्नलिखित रूप में किया जा सकता है ।

	2	1	1	2	1
	156	234	390	1014	1404
78	156	156	234	780	1014
		78	156	234	390

प्रश्नावली

संख्याओं के निम्नलिखित युग्मों के **म स** निकालिए ।

(*i*) 15087, 10857 (*ii*) 9154, 3781

(*iii*) 1375, 4935 (*iv*) 3696, 6300

a, b कोई दो धन-संख्याएँ लीजिए और मान लीजिए कि h उनका **म स** है । A, B, H क्रमशः a, b, h के खंडों के समुच्चयों को व्यक्त करते हैं ।

यह स्पष्ट है कि h का प्रत्येक खंड a, b का खंड भी है अर्थात् a, b के **म स** h का प्रत्येक खंड a, b का समापवर्तक है ।

वस्तुतः h का कोई खंड d लीजिए तब

$$d \mid h$$

साथ ही

$$h \mid a \text{ और } h \mid b.$$

अब

$$d \mid h,\ h \mid a \Rightarrow d \mid a$$
$$d \mid h,\ h \mid b \Rightarrow d \mid b$$

अतः a, b के म स h का प्रत्येक खंड a, b का समापवर्तक है । समुच्चय संकेतन के रूप में

$$H \subset (A \cap B) \qquad \ldots(1)$$

अब हम यह सिद्ध करेंगे कि कथन

$$(A \cap B) \subset H \qquad \ldots(2)$$

भी सत्य है अर्थात् a, b का प्रत्येक समापवर्तक उनके **म स** h का भी खंड है। दोनों कथनों (1) और (2) के फलस्वरूप

$$A \cap B = H$$

अर्थात् a, b के समापवर्ततकों का समुच्चय उनके **म स** h के खंडों का समुच्चय ही है।

हम इस प्रमेय का उल्लेख और इसकी उपपत्ति निम्नलिखित रूप में करते हैं।

प्रमेय—दो संख्याओं का प्रत्येक समापवर्तक उनके **म स** का खंड है।

उपपत्ति—मान लीजिए कि हम a, b के **म स** निकालने के लिए उत्तरोत्तर विभाजन करते हैं। निश्चय ही अंतिम शेष h होगा और यह अपने से पूर्व शेष, जिसे हम k मान लेते हैं, का भी खंड होगा। इसके फलस्वरूप a, b के समापवर्तकों का समुच्चय k, h के समापवर्तकों के समुच्चय के बराबर है। क्योंकि h खंड है k का इसलिए h के खंडों का समुच्चय k, h के समापवर्तकों का समुच्चय ही है और इस कारण यह a, b के समापवर्तकों के समुच्चय के बराबर है।

अतः $$H = A \cap B.$$

उदाहरण

1. $$a = 45,\ b = 63$$

लीजिए।

तब
$$A = \{1, 3, 5, 9, 15, 45\}$$
$$B = \{1, 3, 7, 9, 21, 63\}$$
$$A \cap B = \{1, 3, 9\}$$
$$h = 9$$
$$H = \{1, 3, 9\}$$

स्पष्टतः $$H = A \cap B.$$

2. संख्याओं
$$a = 36,\ b = 64$$

को लीजिए।

अब
$$A = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$$
$$B = \{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64\}$$
$$A \cap B = \{1, 2, 4\}$$
$$h = 4$$
$$H = \{1, 2, 4\}$$

अतः यह सत्यापित हुआ कि
$$H = A \cap B.$$

प्रश्नावली

धन-संख्याओं के निम्नलिखित युग्मों के लिए ऊपर अपनाई गई विधि को कार्यान्वित कीजिए।

(*i*) 24, 72 (*ii*) 42, 55 (*iii*) 18, 99 (*iv*) 75, 40.

दो संख्याओं के **म स** का नियम

यदि m कोई धन-संख्या हो तो

$$ma, \; mb$$

का म स $\qquad a, \; b$

के **म स** के साथ m के गुणन का फल होता है।

यदि a, b का **म स** h हो तो हम यह सिद्ध करेंगे कि ma, mb का **म स** mh होगा।

उत्पत्ति देने से पूर्व हम उपपत्ति में केन्द्रित भाव को प्रकट करने के लिए दो संख्याओं का एक विशेष उदाहरण दे रहे हैं।

मान लीजिए कि

$$a=45, \; b=63$$

और $\qquad m=4$

इस प्रकार संख्याएँ ma, mb क्रमश;

$$180, \; 252$$

हैं।

हम युग्म 45, 63 और युग्म 180, 252 का **म स** निकालते हुए उत्तरोत्तर शेषों के समुच्चय प्राप्त करते हैं।

नीचे हम इसके संबंध में प्राप्त जानकारी का प्रदर्शन कर रहे हैं :

I

	2	2	1
	18	45	63
9	81	36	45
		9	18

II

	2	2	1
	72	180	252
36	72	144	180
		36	72

हम देखते हैं कि शेषों की प्रत्येक पंक्ति में प्रविष्टयों की संख्या एक ही है। और *II* की प्रत्येक प्रविष्ट *I* की तदनुरूपी प्रविष्ट से चौगुनी है। इसके फलस्वरूप 4×45, 4×63 का **म स** 4×9 हुआ। यहाँ 45, 63 का **म स** 9 है।

उपपत्ति का सार यह है कि ma, mb से संबद्ध शेषों की संख्या a, b से संबद्ध शेषों की संख्या के बराबर है और पहले प्रकरण का प्रत्येक शेष दूसरे के तदनुरूपी शेष का m-गुना है।

उपपत्ति नीचे दी जा रही है।

उपपत्ति—

मान लीजिए कि

$$a = bq + r,\ r < b.$$

इसके फलस्वरूप

$$ma = m\ (bq + r)$$
$$= (mb)\ q + mr$$

साथ ही

$$r < b \Rightarrow mr < mb.$$

अत: ma को mb से भाग देने पर शेष mr रहता है।

इसी प्रकार mb को mr से भाग देने पर प्राप्त शेष b को r से भाग देने पर प्राप्त शेष का m- गुना होगा।

अत: ma और mb से सम्बद्ध अंतिम शेष a, b से संबद्ध अंतिम शेष का m—गुना होगा।

इत: परिणाम।

उपप्रमेय—मान लीजिए कि a, b का समापवर्तक d है। यदि a, b का **म स** h हो तो

$$a \div d,\ b \div d$$

का **म स**

$$h \div d$$

होगा।

निश्चय ही $a \div d$, $b \div d$ दोनों ही धन-संख्याएँ हैं। यदि $a \div d$, $b \div d$ का **म स** h' हो तो पूर्व प्रमेय के अनुसार $d\ (a \div d)$, $d\ (b \div d)$ अर्थात् a, b का **म स** $h'\ d$ होगा। अब

$$h'd = h \Rightarrow h' = h \div d$$

इत: उपप्रमेय।

विशेषत:

$$a \div h,\ b \div h$$

का **म स** 1 है।

उदाहरण

1. 36, 60

का **म स** 12 है और

$$3 \times 36,\ 3 \times 60$$

का **म स**

$$3 \times 12 = 36$$

है।

2. 36, 60

का म स 12 है और 36 तथा 60 का एक समापवर्तक 2 होने के कारण

$$36 \div 2, \ 60 \div 2$$

का म स

$$12 \div 2 = 6$$

है।

3.

$$36, \ 60$$

का म स 12 है और

$$36 \div 12, \ 60 \div 12$$

अर्थात्

$$3, \ 5$$

का म स

$$12 \div 12 = 1$$

है।

इसका अर्थ यह हुआ कि 3, 5 का एक मात्र समापवर्तक 1 है।

दो से अधिक संख्याओं का महत्तम समापवर्तक

दो संख्याओं के प्रकारक का विचार करने के उपरांत हम धन-संख्याओं के किसी सांत समुच्चय के लिए **म स** की धारणा का विस्तार करेंगे। क्योंकि संख्याओं के किसी सांत समुच्चय से संबंध विचार तीन संख्याओं संबंध विचार के मूलतः समान ही हैं इसलिए हम उत्तरवर्ती का ही विचार करेंगे।

कोई तीन धन-संख्याएँ a, b, c लीजिए और मान लीजिए कि A, B, C इनके खंडों के समुच्चय हैं।

सर्वनिष्ठ

$$A \cap B \cap C \qquad \cdots(1)$$

का विचार कीजिए।

निश्चय ही यह सर्वनिष्ठ समुच्चय, अरिक्त और सांत है, क्योंकि इसमें केवल a, b, c के सभी समापवर्तक हैं।

सांत अरिक्त समुच्चय (1) का अधिकतम अंग a, b, c का महत्तम समापवर्तक है। अतः हम कहते हैं कि तीनों संख्याओं का महत्तम समापवर्तक इन तीनों के समापवर्तकों में अधिकतम है।

निश्चय ही यह विद्यमान है और अद्वितीय भी है।

नीचे हम तीन या अधिक संख्याओं का **म स** निकालने की व्यवहारिक पद्धित का सूचक एक सूत्र दे रहे हैं।

प्रमेय—तीन संख्याओं का महत्तम समापवर्तक उनमें से किसी एक और दूसरी दो समापवर्तक का महत्तम समापवर्तक है।

उपपत्ति—

तीन संख्याएँ a, b, c लीजिए।

मान लीजिए कि इनमें से किन्हीं दो जैसे a, b का महत्तम समापवर्तक h है। अब

$$A \cap B \cap C = (A \cap B) \cap C.$$

साथ ही हमें यह भी ज्ञात है कि

$$H = A \cap B$$

और इसलिए

$$A \cap B \cap C = H \cap C.$$

अब समुच्चय

$$A \cap B \cap C$$

के अंगों में से अधिकतम a, b, c का **म स** है। और समुच्चय

$$H \cap C$$

के अंगों में से अधिकतम h और c का **म स** है।

अतः a, b, c का **म स** c और a, b के **म स** h का **म स** है।

प्रश्नावली

निम्नलिखित का **म स** निकालिए :

(i) 15807, 10857, 19024

(ii) 3696, 6300, 9282.

16. असहभाज्य गॉस का प्रमेय

असहभाज्य—हम देख चुके हैं कि दो संख्याओं के समापवर्तकों का समुच्चय एक अरिक्त सांत समुच्चय होता है क्योंकि समापवर्तकों के इस समुच्चय में 1 सदैव निहित है। निस्सन्देह समापवर्तकों के इस समुच्चय में साधारणतया 1 के अतिरिक्त अन्य अंग भी होते हैं। किन्तु कई बार किन्हीं दो संख्याओं के समापवर्तकों के समुच्चय का एक मात्र अंग 1 ही होता है अर्थात् दो संख्याओं का समापवर्तक एक ही है।

कुछ उदाहरण लीजिए

1. $a = 12,\ b = 15$

$$A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\} \qquad B = \{1, 3, 15, 5\}$$

$$A \cap B = \{1, 3\}$$

2. $a = 20,\ b = 9$

$$A = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\} \qquad B = \{1, 3, 9\}$$

$$A \cap B = \{1\}.$$

इनके फलस्वरूप निम्नलिखित परिभाषा प्राप्त होती है।

परिभाषा—यदि दो संख्याओं का समापवर्तक 1 के अतिरिक्त अन्य कोई न हो तो उन संख्याओं के युग्म को असहभाज्य कहते हैं।

दो असहभाज्य संख्याओं को सापेक्षतया-अभाज्य भी कहते हैं।

यह देखना सरल है कि दो संख्याएँ तब और तभी असहभाज्य होंगी जब उनका महत्तम समापवर्तक 1 हो।

उदाहरण—

संख्याओं के युग्म (*i*) 12, 35 (*ii*) 63, 26 (*iii*) 162, 35
असहभाज्य हैं और युग्म

(*i*) 6, 8 (*ii*) 45, 65 (*iii*) 36, 216

असहभाज्य नहीं हैं।

सावधान—पाठक को अभाज्य संख्या और असहभाज्य-संख्या-युग्म की धारणाओं में संभावित भ्रम के प्रति सावधान किया जाता है। पहली का संबंध एक धन-संख्या से है किन्तु दूसरी का दो संख्याओं के युग्म से। पाठक निम्नलिखित कथनों की सत्यता भी देख सकता है।

(1) दो अभाज्य संख्याएँ सदैव असहभाज्य होती हैं।
उदाहरणार्थ 7 और 19 असहभाज्य हैं।

(2) असहभाज्य संख्याओं के युग्म में से एक अथवा दोनों अभाज्य हो सकती हैं और ऐसा भी हो सकता है कि उनमें से कोई भी अभाज्य न हो।

उदाहरणार्थ

(*i*) 12, 25 (*ii*) 12, 5 (*iii*) 11, 13

असहभाज्य युग्मों में से पहले में कोई भी संख्या अभाज्य नहीं तथा दूसरे और तीसरे में क्रमशः एक और दोनों संख्याएँ अभाज्य हैं।

प्रमेय—दो संख्याओं a और b का **म स** h तब और तभी होगा जब h समापवर्तक हो a और b का और दोनों संख्याएँ $a \div h$ और $b \div h$ सापेक्षतया अभाज्य हों।

उपपत्ति—मान लीजिए कि :

a और b का **म स** h है। तब

$$a \div h,\ b \div h$$

का **म स**

$$h \div h = 1$$

होगा। और इसलिए

$a \div h$ और $b \div h$ असहभाज्य हैं।

विलोमतः यदि h समापवर्तक हो a और b का, तो $a \div h$ और $b \div h$ का **म स** 1 होगा। इसके फलस्वरूप

$h(a \div h)$ और $h(b \div h)$

का **म स** $h.1$ है अर्थात् a, b का **म स** h है।

कथित परिणाम सिद्ध हो गया।

प्रश्नावली

1. निम्नलिखित में से कौन-से संख्या-युग्म असहभाज्य हैं ?

(*i*) 45, 63 (*ii*) 119, 299 (*iii*) 140, 91

(*iv*) 609, 2157 (*v*) 859, 1311 (*vi*) 315, 207.

2. 'फर्मा का प्रमेय' नाम से प्रसिद्ध प्रमेय निम्नलिखित रूप में है :
यदि p कोई अभाज्य संख्या हो तथा a और p असहभाज्य हों तो p खंड होगा $a^{p-1}-1$ का, अर्थात्

$$p \mid (a^{p-1}-1).$$

a और p के निम्नलिखित मूल्य-युग्मों के लिए इस प्रमेय को सत्यापित कीजिए :

(*i*) $a=2$, $p=3$ (*ii*) $a=3$, $p=5$ (*iii*) $a=4$, $p=3$

(*iv*) $a=5$, $p=3$ (*v*) $a=6$, $p=5$ (*iv*) $a=5$, $p=7$.

गॉस का प्रमेय

इस प्रमेय का उल्लेख करने से पूर्व हम कुछ प्रेक्षण करेंगे।
मान लीजिए कि c खंड है a का अर्थात्

$$c \mid a.$$

यदि b कोई भी धन-संख्या हो तो

$$c \mid a \Rightarrow c \mid a\,b$$

अर्थात् यदि c खंड है a का, तो यह $a\,b$ का भी खंड है।

व्यापक रूप में हम देखते हैं कि यदि c खंड हो a या b में से किसी एक का, तो c खंड होगा $a\,b$ का भी, अर्थात्

$$c \mid a \text{ या } c \mid b \Rightarrow c \mid a\,b.$$

अब स्वभावतः इसके विलोम रूप में भी हमारी रुचि होगी। मान लीजिए कि a, b, c तीन ऐसी धन संख्याएँ हैं जिनमें से c खंड है $a\,b$ का, अर्थात्

$$c \mid a\,b$$

अब प्रश्न यह है कि c खंड है a अथवा b का, या नहीं। हम कुछ विशेष उदाहरण लेते हैं।

(1) यदि

$$a=6,\ b=15,\ c=10$$

तो यद्यपि

$$c \mid a\,b \Leftrightarrow 10 \mid 90$$

सत्य है तथापि c न तो खंड है a का और न b का, अर्थात् इस उदाहरण में यद्यपि

$$c \mid ab$$

तथापि न तो $c \mid a$ और न $c \mid b$.

(2) यदि

$$a=12,\ b=30,\ c=6$$

तो $c \mid a\,b \Leftrightarrow 6 \mid 360$

साथ ही $c \mid a \Leftrightarrow 6 \mid 12$

और $c \mid b \Leftrightarrow 6 \mid 30.$

(3) $$a=12,\ b=30,\ c=10$$

लीजिए।

इसमें $c \mid a\,b \Leftrightarrow 10 \mid 360$

सत्य है। साथ ही यद्यपि

$$c \mid b$$

सत्य है, तथापि

$$c \mid a$$

सत्य नहीं है।

इस प्रकार हम तीनों विचारणीय विकल्पों में से प्रत्येक का उदाहरण देख चुके हैं। निम्नलिखित प्रमेय से विचाराधीन प्रश्न के विषय में उपयोगी जानकारी प्राप्त होती है।

गाँस का प्रमेय

यदि a, b, c तीन संख्याएँ हों जिनके लिए

(*i*) c खंड हो गुणनफल $a\,b$ का,
(*ii*) c और a असहभाज्य हों,
तो c खंड है b का।

उपपत्ति—अब c और a के असहभाज्य होने के कारण इनका म स 1 है। इसलिए

$$c\,b,\ a\,b$$

का म स

$$b \times 1 = b \text{ है।}$$

अब b म स वाली दो संख्याओं

$$c\,b,\ a\,b$$

का एक समापवर्तक c है।

अतः c खंड है b का [पृ० 93 पर प्रमेय देखिए]

उपप्रमेय

यदि अभाज्य p दो अभाज्यों के गुणनफल $p_1\,p_2$ को विभाजित करे तो यह p_1 और p_2 में से कम से कम एक के बराबर अवश्य होगा। व्यापक रूप में यदि अभाज्य p कितने ही अभाज्यों के गुणनफल को विभाजित करे तो यह उनमें से कम से कम एक के बराबर अवश्य होगा।

उदाहरण

यदि

$$a = 12,\ b = 30,\ c = 5.$$

तो $c \mid a\, b \Leftrightarrow 5 \mid 360.$

साथ ही 5 और 12 असहभाज्य हैं, अतः गॉस के प्रमेय के अनुसार 5 खंड है 30 का। इसे प्रत्यक्ष भी देखा जा सकता है।

17. लघुतम समापवर्त्य

दो संख्याएँ 15 और 6 लीजिए। इनके अपवर्त्यों के समुच्चय क्रमशः

$$\{1\times 15,\ 2\times 15,\ 3\times 15,\ 4\times 15 \ldots\ldots\}$$

और $$\{1\times 6,\ 2\times 6,\ 3\times 6,\ 4\times 6,\ 5\times 6 \ldots\}$$

अनंत है। इन दोनों समुच्चयों के सर्वनिष्ठ में केवल वही संख्याएँ हैं जो 15 और 6 दोनों के अपवर्त्य हैं। हम कह सकते हैं कि यह समुच्चय 15 और 6 के समापवर्त्यों का समुच्चय है। यह सर्वनिष्ठ समुच्चय अरिक्त है। इसके अंग 30, 60, 90......हैं और इसलिए इसका न्यूनतम अंग 30 होगा। इस न्यूनतम अंग 30 को 15 और 6 का लघुतम समापवर्त्य कहते हैं और इसे संक्षेप में **ल स** द्वारा सूचित करते हैं।

दो विशेष संख्याएं 15 और 6 लेने के स्थान पर अब हम कोई दो संख्याएं a और b लेते हैं। a और b के अपवर्त्यों के समुच्चय क्रमशः

$$\{a,\ 2a,\ 3a \ldots\ldots\}$$

और $$\{b,\ 2b,\ 3b \ldots\ldots\}$$

होंगे। इन समुच्चयों को $\{x\, a : x \in \mathbf{N}\}$ और $\{x\, b : x \in \mathbf{N}\}$ के रूप में भी व्यक्त किया जा सकता है। अब a और b दोनों के अपवर्त्यों वाला सर्वनिष्ठ समुच्चय लीजिए। यह समुच्चय अरिक्त है क्योंकि इसमें कम से कम एक अवयव $a\, b$ अवश्य है जो a और b दोनों का एक अपवर्त्य है।

इस सर्वनिष्ठ समुच्चय का कोई न्यूनतम अंग होगा। a और b के समापवर्त्यों के समुच्चय का यह न्यूनतम अंग a और b का लघुतम समापवर्त्य कहलाता है, संक्षेप में इसे a, b का **ल स** लिखते हैं।

परिभाषा—दो संख्याओं के समापवर्त्यों में से न्यूनतम उनका लघुतम समापवर्त्य कहलाता है।

निश्चय ही किन्हीं दो संख्याओं का ल स विद्यमान है और अद्वितीय भी।

प्रश्नावली

1. निम्नलिखित संख्या-युग्मों के अपवर्त्यों के समुच्चय लिखिए और उनका **ल स** निकालिए।

(*i*) 8, 12	(*ii*) 9, 6	(*iii*) 4, 8
(*iv*) 14, 22	(*v*) 7, 11	(*vi*) 4, 14
(*vii*) 15, 20	(*viii*) 24, 30	(*ix*) 8, 10
(*x*) 21, 24		

टिप्पणी 1—किन्हीं तीन संख्याओं a, b, c के अपवर्त्यों के समुच्चयों का सर्वनिष्ठ समुच्चय अरिक्त होता है, क्योंकि इसमें कम से कम एक अंग $a\,b\,c$ अवश्य होगा। इसलिए इस समुच्चय में कोई न्यूनतम अंग होगा जिसे a, b, c का लघुतम समापवर्त्य कहते है। ठीक इसी प्रकार संख्याओं के किसी सांत समुच्चय के **ल स** की परिभाषा, इन संख्याओं के अपवर्त्यों के समुच्चयों के सर्वनिष्ठ समुच्चय के न्यूनतम अंग के रूप में दी जा सकती है।

2. केवल परिभाषा के प्रयोग द्वारा संख्याओं के निम्नलिखित समुच्चयों का ल स निकालिए।

(*i*) 2, 4, 10 (*ii*) 7, 6, 14 (*iii*) 5, 10, 15.

टिप्पणी 2—ab समापवर्त्य है a और b का, साथ ही $a\,b$ का प्रत्येक अपवर्त्य a और b का समापवर्त्य है, इस कारण

$$a\,b,\ 2ab,\ 3ab\cdots\cdots$$

सभी a और b के अपवर्त्य हैं। ऐसा भी हो सकता है कि $a\,b$ के इन अपवर्त्यों के अतिरिक्त a और b के समापवर्त्यों के समुच्चय में कुछ और भी अंग हों। पाठक निम्नलिखित उदाहरण में स्पष्टतया बतलाई गई इस बात को देख सकता है। इसमें 15 और 6 के समापवर्त्यों का समुच्चय

$$\{30,\ 60,\ 90\cdots\cdots\} \qquad \ldots(i)$$

है, किन्तु 15×6 के अपवर्त्यों का समुच्चय

$$\{90,\ 180,\ 270\cdots\cdots\} \qquad \ldots(ii)$$

है। स्पष्टतया समुच्चय (*ii*) समुच्चय (*i*) का उपसमुच्चय है। नीचे हम यह सिद्ध करेंगे कि एक ऐसी संख्या विद्यमान होती है जिसके अपवर्त्यों का समुच्चय दो संख्याओं के समापवर्त्यों का समुच्चय ही हो। दो संख्याओं 15 और 6 के लिए यह संख्या

$$\frac{15.6}{3}$$

आती है। यहाँ 3 दो संख्याओं का **म स** है।

प्रमेय[1]—यदि किन्हीं दो धन-संख्याओं a और b का **म स** h हो तो $a\,b\div h$ के अपवर्त्यों का समुच्चय $\{x\,(a\,b\div h) : x\in \mathbf{N}\}$ बराबर है a और b के समापवर्त्यों के समुच्चय के प्रतीक रूप में

$$\{x\,(a\,b\div h) : x\in \mathbf{N}\}=\{x\,a : x\in \mathbf{N}\}\cap\{x\,b : x\in \mathbf{N}\}.$$

उपपत्ति—a और b का **म स** h है।

संख्याएँ a' और b' विद्यमान हैं जिनके लिए

$$a=h\,a' \text{ और } b=h\,b'.$$

[1] इस प्रमेय और अद्वितीय गुणनखंडन प्रमेय की उपपत्तियों को पहली बार पढ़ते हुए छोड़ा जा सकता है। किन्तु पाठक इन दोनों महत्त्वपूर्ण प्रमेयों की विषय वस्तु का परिचय अवश्य प्राप्त कर लें।

निश्चय ही $a \div h$ और $b \div h$ का **म स** $h \div h$ होगा अर्थात् a' और b' का **म स** 1 है।

a और b का कोई समापवर्त्य u लीजिए। तब c, d ऐसी संख्याएँ होंगी जिनके लिए

$$u = c\,a \text{ और } u = d\,b.$$

साथ ही

$$a = h\,a' \text{ और } b = h\,b'.$$

इस प्रकार

$$u = c\,h\,a' = h\,(ca') \text{ और } u = d\,h\,b' = h\,(d\,b').$$

अब
$$h\,(c\,a') = h\,(d\,b') \Rightarrow c\,a' = d\,b'.$$

पुनः
$$c\,a' = d\,b' \Rightarrow b' \mid (c\,a').$$

अब b' खंड है $c\,a'$ का और b', a' असहभाज्य हैं। गॉस के प्रमेय के फलस्वरूप

$$b' \mid c.$$

अतः m कोई ऐसी धन-संख्या होगी जिसके लिए

$$\begin{aligned} c &= b'\,m \\ \Rightarrow c\,a' &= (b'\,m)\,a' = m\,(b'\,a') \\ \Rightarrow \quad u = c\,h\,a' &= h\,m\,(b'\,a'') \\ &= mh\,b'\,a' \\ &= m(ab \div h) \end{aligned}$$

परिणामतः a, b का समापवर्त्य u, अपवर्त्य है

$$(ab) \div h$$

का। इसलिए a और b का प्रत्येक समापवर्त्य, $(ab) \div h$ का अपवर्त्य होगा।

अब हम यह सिद्ध करेंगे कि $ab \div h$ का प्रत्येक अपवर्त्य, a और b का अपवर्त्य भी है।

$$ab \div h$$

का कोई अपवर्त्य

$$x\,(ab \div h)$$

लीजिए

अब
$$\begin{aligned} x\,(ab \div h) &= xab \div h \\ &= xa(b \div h) \\ &= x(b \div h)a \end{aligned}$$

साथ ही
$$x\,(ab \div h) = x(a \div h)b.$$

फलतः
$$ab \div h$$

का प्रत्येक अपवर्त्य, a और b दोनों का अपवर्त्य है।

इतः प्रमेय।

प्रमेय—दो संख्याओं का गुणनफल उनके महत्तम समापवर्तक और लघुतम समापवर्त्य के गुणनफल के बराबर होता है।

उपपत्ति—a, b कोई दो संख्याएँ लीजिए और मान लीजिए कि h, l क्रमशः उनके महत्तम समावर्तक और लघुतम समापवर्त्य के सूचक हैं।

हमें सिद्ध करना है कि

$$hl = ab.$$

हम देख चुके हैं कि a और b के समापवर्त्यों का समुच्चय

$$\{x\ (ab \div h) : x \in \mathbf{N}\}$$

है। इसलिए a, b का लघुतम समापवर्त्य $ab \div h$ है और इसलिए

$$ab \div h = l$$

$$\Rightarrow \quad ab = hl.$$

इतः परिणाम।

टिप्पणी—यह प्रमेय किन्हीं दो संख्याओं का लघुतम समापवर्त्य निकालने की विधि बतलाता है। a, b कोई दो संख्याएँ लीजिए। इनका लघुतम समापवर्त्य

$$(ab) \div h$$

है, यहाँ a, b का महत्तम समापवर्तक h है।

इससे यह भी परिणाम निकलता है कि दो संख्याओं के लघुतम समापवर्त्य का प्रत्येक अपवर्त्य उनमें से प्रत्येक का अपवर्त्य भी है।

प्रश्नावली

धन-संख्याओं के निम्नलिखित युग्मों का ल स निकालिए।

(*i*) 420, 135 (*ii*) 252, 360 (*iii*) 16, 20.

18. अद्वितीय अभाज्य गुणनखंडन

हम पहले देख चुके हैं कि 1 से विभिन्न प्रत्येक संख्या का कोई अभाज्य खंड अवश्य होता है। अब हम इस परिणाम का परिष्कार करेंगे और सिद्ध करेंगे कि प्रत्येक संख्या को अभाज्यों के गुणनफल के रूप में व्यक्त किया जा सकता है। जैसे

$$210 = 2 \times 3 \times 7 \times 5.$$

यहाँ दाएँ पक्ष का प्रत्येक खंड अभाज्य संख्या है। एक और उदाहरण में

$$308 = 2 \times 2 \times 7 \times 11.$$

प्रत्येक संख्या का अभाज्यों के गुणनफल के रूप में व्यक्त हो सकना तो सत्य है ही साथ ही यह भी सत्य है कि इस प्रकार के प्रत्येक गुणनफल में अभाज्य खंड वही होंगे, उनका क्रम भले ही बदल जाए। उदाहरण के लिए हम

$$210 = 7 \times 3 \times 2 \times 5, \quad 210 = 3 \times 5 \times 2 \times 7,$$

भी लिख सकते थे। किन्तु जैसा कि हम सिद्ध करेंगे, तथ्य यह है कि 210 को अभाज्यों के गुणनफल के रूप में किसी भी प्रकार व्यक्त करने से सदैव वही अभाज्य अर्थात् 2, 3, 5, 7 आएँगे।

निस्सन्देह यदि कोई अभाज्य किसी वियोजन में एक से अधिक बार आए तो वह दूसरे प्रत्येक वियोजन में उतनी ही बार आएगा। इस प्रकार अभाज्यों के गुणनफल के रूप में 308 के प्रत्येक वियोजन में अभाज्य खंड 2 दोबार ही आएगा।

पाठक को चाहिए कि वह इस कथन की सत्यता को कुछ संख्याओं, जैसे

(*i*) 3146 (*ii*) 204 (*iii*) 1085 (*iv*) 101 (*v*) 442

के प्रसंग में सत्यापित करे।

अब हम अद्वितीय अभाज्य गुणनखंडन प्रमेय का उल्लेख और इसकी उपपत्ति करेंगे।

प्रमेय—1 से विभिन्न प्रत्येक धन-संख्या को अभाज्यों के गुणनफल के रूप में व्यक्त किया जा सकता है और खंडों के क्रम को छोड़कर यह अभिव्यक्ति अद्वितीय है।

उपपत्ति—कोई संख्या x लीजिए। यदि x अभाज्य हो तो सिद्ध करने को और कुछ नहीं रहता। अब मान लीजिए कि x अभाज्य नहीं है। इसलिए इसका कोई अभाज्य खंड, जैसे p_1 होगा और तब

$$x = p_1, x_1, \quad x_1 < x.$$

यदि x_1 अभाज्य हो तो प्रमेय सिद्ध हो गया। किन्तु यदि x_1 अभाज्य न हो तो

$$x_1 = p_2 \, x_2.$$

यहाँ p_2 अभाज्य है और

$$x_2 < x_1$$

इस प्रकार चलकर हम अभाज्यों का एक अनुक्रम

$$p_1, p_2, \ldots\ldots \qquad \ldots(1)$$

और संख्याओं का एक अनुक्रम

$$x_1, x_2, \ldots\ldots \qquad \ldots(2)$$

जिसमें

$$x > x_1 > x_2 \ldots\ldots$$

प्राप्त करते हैं।

अनुक्रम (2) के उत्तरोत्तर कम होते जाने के कारण यह प्रक्रिया चरणों की कुछ निश्चित संख्या के पश्चात् अवश्य समाप्त होगी। अतः अनुक्रम (2) का एक ऐसा अंग अवश्य प्राप्त होगा जो अभाज्य हो। मान लीजिए कि x_{n-1} अभाज्य संख्या है। तब

$$x = p_1 p_2 \ldots\ldots p_{n-1} x_{n-1}.$$

x_{n-1} के लिए p_n लिखने पर

$$x = p_1 p_2 \ldots\ldots p_{n-1} \, p_n \qquad \ldots(3)$$

प्राप्त होगा। (3) संख्या x को अभाज्यों के गुणनफल के रूप में व्यक्त करता है। निस्संदेह इन सभी अभाज्यों का विभिन्न होना आवश्यक नहीं है।

(3) **की अद्वितीयता।** यदि संभव हो तो

$$x=q_1q_2\ldots\ldots q_m \qquad \ldots(4)$$

को अभाज्यों के गुणनफल के रूप में x की वैकल्पिक अभिव्यक्ति मान लीजिए।
और मान लीजिए $n\leqslant m$. (3) और (4) के आधार पर

$$p_1p_2\ldots\ldots p_n=q_1q_2\ldots\ldots q_m \qquad \ldots(5)$$

अब (5) से यह सिद्ध होता है कि अभाज्य p_1 खंड है गुणनफल

$$q_1q_2\ldots\ldots q_m$$

का, और इसलिए p_1 इन अभाज्यों में से किसी एक के बराबर होगा। व्यापकता की किसी हानि के बिना हम मानते हैं कि $p_1=q_1$. ऐसी कल्पना इसलिए संभव है क्योंकि इसमें केवल खंडों के क्रम का परिवर्तन और उनका उपयुक्त पुनर्नामकरण ही करने की आवश्यकता होती है।

$p_1=q_1$ होने के कारण गुणन के अपवर्तन नियम की सहायता से (5) के फलस्वरूप

$$p_2p_3\ldots\ldots p_n=q_2q_3\ldots\ldots q_m \qquad \ldots(6)$$

प्राप्त होता है।

ठीक पहले की भाँति p_2 का अभाज्यों $q_2q_3\ldots\ldots,q_m$ में से किसी एक के बराबर होना आवश्यक है। व्यापकता की किसी हानि के बिना हम मान लेते हैं कि $p_2=q_2$ और इसलिए (6) से

$$p_3p_4\ldots\ldots p_n=q_3q_4\ldots\ldots q_m \qquad \ldots(7)$$

प्राप्त होता है।

ठीक इसी प्रकार चलकर यदि

$$m>n$$

तो हम

$$p_3=q_3,\ p_4=q_4,\ldots\ldots p_n=q_n \qquad \ldots(8)$$

और $$q_{n+1}q_{n+2}\ldots\ldots q_m=1 \qquad \ldots(9)$$

प्राप्त करते हैं।

किन्तु 1 का कोई भी अभाज्य खंड नहीं होता।

इस प्रकार $m>n$ से विरोध उत्पन्न हो जाता है।

$$\therefore \qquad m=n,$$

और इसलिए x के दो वियोजन

$$p_1p_2p_3\ldots\ldots p_n$$

और $$q_1q_2q_3\ldots\ldots q_n$$

अभिन्न हैं।

प्रश्नावली

निम्नलिखित को अभाज्य खंडों के गुणनफल के रूप में व्यक्त कीजिए।

(*i*) 675 (*ii*) 528 (*iii*) 990
(*iv*) 1024 (*v*) 660 (*vi*) 26000
(*vii*) 4050 (*viii*) 11220 (*ix*) 99792
(*x*) 874044.

19. दो दत्त संख्याओं की अभाज्यों के गुणनफलों के रूप में अभिव्यक्ति द्वारा उनके म स और ल स का निर्धारण

व्यापक विधि के विवेचन से पूर्व हम एक विशेष उदाहरण लेते हैं।

युग्म

$$12600, 660$$

को लीजिए।

हम इन दोनों संख्याओं को अभाज्यों के गुणनफल के रूप में व्यक्त करते हैं। इस प्रकार

$$12600 = 2^3 \times 3^2 \times 5^2 \times 7$$
$$660 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 11$$

इन दोनों व्यंजकों में आने वाली अभाज्य संख्याएँ

$$2, 3, 5, 7, 11$$

हैं।

इन अभाज्य संख्याओं का हम एक-एक करके विचार करते हैं। इनमें से 7 और 11 ऐसी अभाज्य संख्याएँ हैं जो दी हुई संख्याओं में से केवल एक का खंड हैं और इस कारण इनमें से कोई भी उनके **म स** का खंड नहीं है।

2^2 महत्तम घात है 2 का, जो दोनों संख्याओं का खंड है।
3^1 महत्तम घात है 3 का, जो दोनों संख्याओं का खंड है।
5^1 महत्तम घात है 5 का, जो दोनों संख्याओं का खंड है।

अतः

$$2^2 \times 3 \times 5$$

दोनों संख्याओं का महत्तम समापवर्तक है। इसे हम दी हुई संख्याओं का **म स** कहते हैं।

वस्तुतः, यदि यह **म स** न होता तो वास्तविक **म स** के अभाज्यों के गुणनफल के रूप में 2, 3, 5 से विभिन्न कोई अभाज्य खंड अवश्य होता और ऐसा अभाज्य खंड दी हुई दोनों संख्याओं के अभाज्य गुणनखंडन में अवश्य आता। परंतु ऐसा नहीं है। अतः दी हुई संख्याओं का **म स**

$$2^2 \times 3 \times 5 = 60$$

है।

अब हम दी हुई संख्याओं के ल स का विचार करते हैं ।

पुन: दी हुई संख्याओं के अभाज्यों के गुणनफलों की अभिव्यक्तियों का विचार कीजिए ।

इनमें आने वाली अभाज्य संख्याएँ

$$2, 3, 5, 7, 11$$

है ।

हम देखते हैं कि अभाज्य गुणनखंडन

$$2^3 \times 3^2 \times 5^2 \times 7 \times 11$$

वाली संख्या दी हुई दोनों संख्याओं का अपवर्त्य है अर्थात् यह उनका समापवर्त्य है ।

साथ ही यह भी स्पष्ट है कि इन अभाज्य संख्याओं के न्यून घातों का गुणनफल समापवर्त्य नहीं होगा ।

कार्यकारी सूत्र

कोई संख्याएँ a, b लीजिए । हम मानते हैं कि इन्हें अभाज्य खंडों के गुणनफल के रूप में व्यक्त किया गया है ।

अब उन अभाज्य संख्याओं को लीजिए जो दोनों अभाज्य गुणनखंडनों में आती हैं ।

तब समाभाज्य संख्याओं के न्यून घातों का गुणनफल **म स** होता है । दोनों में से एक अथवा दोनों व्यंजनों में आने वाली अभाज्य संख्याओं के अधिक घातों का गुणनफल अपेक्षित **ल स** होता है ।

उदाहरण

निम्नलिखित अभाज्य गुणनखंडनों वाली दो संख्याएँ लीजिए :

$a = 2^3 \times 5 \times 11 \times 13^2$

$b = 2^2 \times 5^2 \times 11^2 \times 13 \times 17$

मस $= 2^2 \times 5 \times 11 \times 13$

लस $= 2^3 \times 5^2 \times 11^2 \times 13^2 \times 17.$

प्रश्नावली

1. अभाज्यों के गुणनफलों के रूप में व्यक्त करके संख्याओं के निम्नलिखित समुच्चयों के म स निकालिए ।

(i) 594, 5544, 2574 (ii) 546, 4095, 4641

(iii) 429, 528, 1904 (iv) 1230, 14145, 7257

(v) 144, 112, 135, 418 (vi) 225, 453, 1557, 720.

(vii) 7, 17, 29, 31, 47 (viii) 105, 441, 231, 672, 819

(ix) 82, 410, 684, 738, 1026 (x) 183, 488, 793, 915, 1220.

2. अभाज्यों के गुणनफलों के रूप में व्यक्त करके संख्याओं के निम्नलिखित समुच्चयों के ल स निकालिए ।

(*i*) 28, 44, 132 (*ii*) 420, 135, 300

(*iii*) 786, 800, 5168 (*iv*) 105, 252, 360, 700

(*v*) 14, 35, 42, 63, 126 (*vi*) 7, 13, 29, 53, 2

(*vii*) 32, 48, 176, 36, 24 (*viii*) 15, 14, 16, 20, 10

(*ix*) 4, 44, 444, 4444 (*x*) 72, 117, 236, 351.

संक्षेप

धन-संख्याओं के समुच्चय में 'खंड है... का' संबंध

a खंड है b का $\Leftrightarrow$ $a \mid b$ $\Leftrightarrow$ b अपवर्त्य है a का ।

$a \mid b$ तथा $b \mid a \Leftrightarrow a = b$

$a \mid b$ तथा $b \mid c \Leftrightarrow a \mid c$

$a \mid b$ तथा $a \mid c \Leftrightarrow a \mid (b+c)$

$a \mid b$ तथा $a \mid c \Rightarrow a \mid (bc)$.

2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11

से विभाज्यता की कसौटियां ।

दो और दो से अधिक संख्याओं का म स और ल स ।

दो संख्याओं के म स के निर्धारण की कलनविधि ।

दो संख्याओं के म स और ल स का गुणनफल ।

अभाज्य संख्याएँ । भाज्य संख्याएँ । असहभाज्य संख्या-युग्म । गॉस का प्रमेय :

$a \mid bc$ और a, b असहभाज्य हैं $\Rightarrow a \mid c$.

अद्वितीय अभाज्य गुणनखंडन प्रमेय ।

अद्वितीय अभाज्य गुणनखंडन द्वारा संख्याओं के समुच्चयों के म स और ल स का परिकलन ।

दो संख्याओं का प्रत्येक समापवर्तक उनके महत्तम समापवर्तक का खंड होता है ।

दो संख्याओं का प्रत्येक समापवर्त्य उनके लघुतम समापवर्त्य का अपवर्त्य होता है ।

सिंहावलोकन प्रश्नावली

1. यूक्लिड-कलनविधि द्वारा निश्चित कीजिए कि निम्नलिखित संख्या-युग्मों में से कौन-से असहभाज्य हैं ।

(*i*) 385, 931 (*ii*) 3753, 3380

(*iii*) 564, 7963 (*iv*) 17463, 27325.

2. पाँच क्रमागत धन-संख्याएँ दीजिए जिनमें से कोई भी अभाज्य न हो ।

3. दो क्रमागत धन-संख्याओं का म स क्या होता है ?

4. सिद्ध कीजिए कि दो क्रमागत विषम संख्याएँ असहभाज्य होती हैं ।

5. यदि a और b असहभाज्य हों तो किस प्रतिबन्ध में $a+b$ और $a-b$ भी असहभाज्य होंगे ?

6. यदि दो धन-संख्याएँ, धन-संख्याओं के वर्ग हों, तो सिद्ध कीजिए कि उनके म स और ल स भी धन-संख्याओं के वर्ग होंगे।

7. दो संख्याओं का म स 14 है। यदि म स निकालने की विभाजन-कलन विधि में प्राप्त भागफल श्रृंखला 3, 8, 2 और 4 हो तो वे संख्याएँ निकालिए।

8. सिद्ध कीजिए कि 1 से विभिन्न किसी विषम संख्या के वर्ग में से 1 घटाने पर ऋण-फल 8 से विभाज्य होता है।

9. चार संख्याओं a, b, c, d का ल स उनके गुणनफल $abcd$ को चार संख्याओं bcd, acd, abd, abc के म स से भाग देने पर प्राप्त होता है।

10. ऐसी दो संख्याएँ निकालिए जिनका म स 20 और ल स 420 हो।

11. ऐसी दो संख्याएँ निकालिए जिनका गुणनफल 12600 और ल स 6300 हो।

12. ल स 297 वाली ऐसी दो धन-संख्याएँ a और b निकालिए जिनके लिए

$$a^2+b^2=10530.$$

13. सिद्ध कीजिए कि गुणनफल $n(n+1)(n+2)$ विभाज्य है 6 से।

14. सिद्ध कीजिए कि गुणनफल $n(n+1)(2n+1)$ विभाज्य है 6 से।

15. सिद्ध कीजिए कि दो संख्याओं में से यदि किसी एक को किसी ऐसी संख्या से गुणा किया जाए जो दूसरी संख्या के साथ अपेक्षतया अभाज्य हो, तो उनका म स नहीं बदलता।

16. अभाज्य 7 का कौन-सा महत्तम घात पहली पाँचसौ अभाज्य संख्याओं के गुणनफल को विभाजित करता है ?

17. a और b ऐसी धन-संख्याएँ हैं जिनके लिए

$$a^2-b^2$$

अभाज्य संख्या है।

सिद्ध कीजिए कि

$$a^2-b^2=a+b.$$

[सूत्र $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ का प्रयोग कीजिए।]

18. यदि a और b कोई विषम अभाज्य हों तो सिद्ध कीजिए कि a^2-b^2 भाज्य है।

19. किसी विषम धन-संख्या के वर्ग को 8 से भाग देने पर शेष क्या रहेगा ?

20. किसी संख्या के वर्ग को 5 से भाग देने पर शेष क्या रहेगा ?

21. यदि कोई संख्या 3 और 4 से विभाज्य हो तो सिद्ध कीजिए कि वह 12 से भी विभाज्य होगी।

22. यदि कोई संख्या 3 और 8 से विभाज्य हो तो सिद्ध कीजिए कि वह 24 से भी विभाज्य होगी।

23. 50 से कम ऐसी संख्याएँ बताइए जो इसके साथ अपेक्षतया अभाज्य हों।

24. यदि a और b असहभाज्य हों तो सिद्ध कीजिए कि a^2 और b^2 भी असहभाज्य होंगे।

25. यदि दो अभाज्य संख्याओं p, q में से प्रत्येक खंड हो a का, तो सिद्ध कीजिए कि गुणनफल $p\ q$ भी खंड होगा a का।

26. यदि दो संख्याओं का **म स** और उनका योगफल और गुणनफल निम्नलिखित सारणियों के अनुसार हो तो संख्याएँ निकालिए।

I

योगफल	72	360	552	420	180	96	168
म स	9	18	24	12	15	12	24

II

गुणनफल	64800	1512	360	2700	840
म स	18	6	5	6	2

27. यदि $c \mid a$, $c \mid b$, तो सिद्ध कीजिए कि

$$(a+b)\div c=(a\div c)+(b\div c).$$

28. यदि $c \mid a$, $c \mid b$, तो सिद्ध कीजिए कि

$$c \mid (a\ b).$$

29. यदि किसी संख्या के अपने से अतिरिक्त खंडों का योगफल उसके बराबर हो तो उसे परिपूर्ण संख्या कहते हैं। उदाहरणार्थ 6 एक परिपूर्ण संख्या है क्योंकि

$$6=(1+2+3).$$

30 से कम एक और परिपूर्ण संख्या होती है। यह संख्या बताइए।

30. यदि दो अभाज्य संख्याओं का अंतर 2 हो तो उनके युग्म को यमज अभाज्य हैं। उदाहरणार्थ 3, 5 यमज अभाज्य हैं। 100 से कम सभी यमज अभाज्य लिखिए।

3

भिन्न

20. भूमिका

अध्याय 1 में हम देख चुके हैं कि किन्हीं दो धन-संख्याओं का गुणनफल एक धन-संख्या ही होती है और इसलिए उन्हें गुणा करना सदैव संभव होता है, किन्तु गुणन की प्रतिलोम रूप विभाजन की संक्रिया के प्रसंग में स्थिति इतनी सुखद नहीं है। इस प्रकार धन-संख्याओं के प्रसंग में किन्हीं दो धन-संख्याओं a, b के लिए प्रतीक

$$a \div b$$

को सदैव सार्थक नहीं माना जा सकता। वस्तुतः, धन-संख्याओं के प्रसंग में प्रतीक

$$a \div b$$

के सार्थक होने का प्रतिबंध यह है कि b खंड हो a का।

अतः

$$a \div b \text{ सार्थक है } \Leftrightarrow b \mid a.$$

उदाहरणार्थ, धन-संख्याओं के समुच्चय के प्रसंग में प्रतीक

$$6 \div 3$$

सार्थक है क्योंकि यह 2 के बराबर है। किन्तु प्रतीक

$$5 \div 3$$

सार्थक नहीं है।

इस अध्याय में हम नई संख्याओं का आविष्कार करेंगे। नई संख्याओं के इस समुच्चय को **भिन्नों** का समुच्चय कहते हैं। धन-संख्याओं का समुच्चय इस समुच्चय का एक उपसमुच्चय होगा। साथ ही भिन्नों के इस समुच्चय में विभाजन बिना किसी प्रतिबंध के संभव होगा। वस्तुतः, हम यह देखेंगे कि

भिन्नों के इस समुच्चय का प्रत्येक अंग समुच्चय के किसी भी अंग से विभाज्य होगा। इस प्रकार साररूप में भिन्नों के समुच्चय में विभाज्यता की धारणा निरर्थक हो जाएगी।

जैसा कि धन-संख्याओं के समुच्चय में किया गया था, भिन्नों के समुच्चय में भी हम योग तथा गुणन के दो संयोजनों और क्रम-संबंध का अध्ययन करेंगे। हम यह भी दिखाएँगे कि गुणन के प्रतिलोम रूप में विभाजन संयोजन प्रतिबंध रहित होता है। निस्संदेह योग का प्रतिलोम व्यवकलन समस्या ही बना रहेगा क्योंकि हम देखेंगे कि किन्हीं दो भिन्नों का अंतर सदैव सार्थक नहीं होता। यहाँ यह कह देना उचित होगा कि अगले अध्याय में अध्ययन का विस्तार परिमेय संख्याओं तक हो जाने से व्यवकलन की इस समस्या का भी समाधान हो जाएगा।

21. भिन्न की धारणा

मान लीजिए कि एक डबलरोटी के 10 बराबर टुकड़े हैं और आपके पास उनमें से चार हैं। तब यह कहने की अपेक्षा कि आपके पास डबलरोटी के दस टुकड़ों में से चार हैं, यह भी कहा जा सकता है कि आपके पास डबलरोटी के चार दशमांश हैं। इसे कहने का एक तीसरा ढंग भी है, अर्थात् आपके पास

डबलरोटी का $4/10$ है

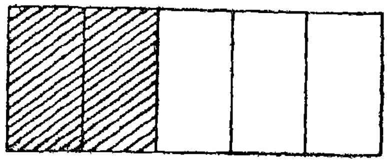
और इसे डबलरोटी का 4 बटा 10 पढ़ते हैं।

व्यापक रूप में, मान लीजिए कि हमारे पास कोई वस्तु है, जैसे, एक आयताकार क्षेत्र, जिसे हमने b बराबर भागों में बाँटा है। तब पूरे क्षेत्र के उस भाग को, जिसमें इन बराबर भागों में से a भाग हैं, क्षेत्र का

$$\frac{a}{b} \text{ या } a/b$$

कह सकते हैं और इसे क्षेत्र का a बटा b पढ़ते हैं। यहाँ a और b दो धन-संख्याएँ हैं।

उदाहरणार्थ, साथ के आयताकार क्षेत्र वाले चित्र में छायित भाग पूरे क्षेत्र का $2/5$ है।



भागों की समता

यह सरलतापूर्वक देखा जा सकता है कि डबलरोटी का $4/10$ उतना ही है जितना कि उसका $2/5$ या $8/20$.

वास्तव में डबलरोटी को दस बराबर टुकड़ों में बाँटकर उनमें से चार लेने पर इसका जो भाग प्राप्त होता है वह उतना ही है जितना इसको पाँच बराबर भागों में बाँटकर उनमें से दो लेने पर या इसको बीस बराबर भागों में बाँट कर उनमें से आठ लेने पर प्राप्त होता है।

पुनः यह भी सरलता से देखा जा सकता है कि निम्नलिखित में से प्रत्येक 20 पैसे का सूचक होने से एक रुपए का वही भाग है।

(*i*) रुपए का $2/10$, (*ii*) रुपए का $4/20$,

(*iii*) रुपए का $1/5$.

इसी प्रकार आयताकार क्षेत्र के निम्नलिखित भागों में से प्रत्येक का क्षेत्रफल समान है।

(*i*) क्षेत्र का a/b, (*ii*) क्षेत्र का $2a/2b$,

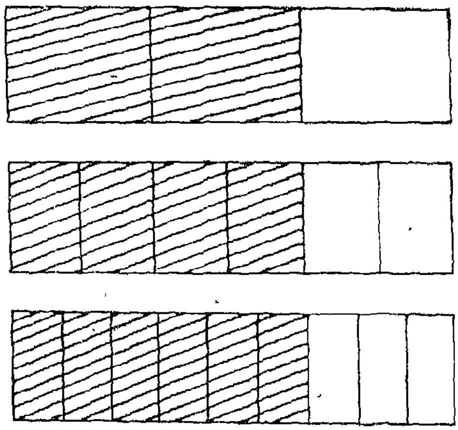
(*iii*) क्षेत्र का $3a/3b$.

व्यापक रूप में, यदि k कोई भी धन-संख्या हो तो

$$\text{किसी क्षेत्र का } \frac{a}{b} = \text{उसी क्षेत्र का } \frac{ak}{bk}.$$

वास्तव में यदि हम किसी क्षेत्र को b बराबर भागों में बाँटें और इनमें से a भागों को लें तो हम क्षेत्र का वही भाग प्राप्त करेंगे जो उसको bk बराबर भागों में बाँट कर उनमें से ak लेने पर प्राप्त करते हैं।

उदाहरण के लिए, साथ के चित्र में सम-छायित भाग क्षेत्र का $2/3$, क्षेत्र का $4/6$ और क्षेत्र-का $6/9$ व्यक्त करते हैं।



अतः लंबाई, क्षेत्र, आयतन, पिंड, अन्त-राशि, जैसे बराबर वाले भागों में बाँटी जा सकने वाली किसी वस्तु का a/b उतना ही है जितना कि उस वस्तु का ak/bk. इस प्रकार हम संबद्ध वस्तु के भाग को बदले बिना a और b को किसी भी धन-संख्या द्वारा गुणा कर सकते हैं।

यह भी देखा जा सकता है कि यदि d कोई समापवर्तक हो a और b का, तो किसी वस्तु का a/b उतना ही होता है जितना उसी वस्तु का $\frac{a \div d}{b \div d}$. जैसे क्षेत्र का $6/9$ उतना ही है जितना उस क्षेत्र का $\frac{6 \div 3}{9 \div 3}$

$=$ क्षेत्र का $2/3$.

नीचे हम यह सिद्ध करने का प्रयास करेंगे कि

$$\text{किसी वस्तु का } \frac{a}{b} = \text{उसी वस्तु का } \frac{c}{d}$$

यदि

$$ad = bc.$$

हम देख चुके हैं कि

$$\text{किसी वस्तु का } \frac{a}{b} = \text{उसी वस्तु का } \frac{ad}{bd}$$

$=$उसी वस्तु का $\frac{bc}{bd}$ ($\because ad=bc$ दिया हुआ है ।)

$=$उसी वस्तु का $\frac{c}{d}$

उदाहरण के लिए, क्षेत्र का $\frac{4}{6}=$ क्षेत्र का $\frac{6}{9}$

क्योंकि $4\times 9=6\times 6.$

किसी वस्तु के दो भागों को एकत्र रखना

मान लीजिए कि हमारे पास किसी वस्तु का 3/10 और उसी वस्तु का 4/10 भी है। इन दोनों भागों को एकत्र रखने पर प्राप्त नया भाग

उस वस्तु का $\frac{3+4}{10}$ अर्थात् $\frac{7}{10}$ है।

व्यापक रूप में, अब मान लीजिए कि हमारे पास किसी वस्तु का a/b

और

उसी वस्तु का c/d भी है।

इस वस्तु को आयताकार क्षेत्र माना जा सकता है। हम इन दोनों भागों को एकत्र रखने से प्राप्त नए भाग का वर्णन करना चाहते हैं।

जैसा कि पहले देखा जा चुका है

$$\text{वस्तु का } \frac{a}{b} = \text{वस्तु का } \frac{ad}{bd}$$

और

$$\text{वस्तु का } \frac{c}{d} = \text{वस्तु का } \frac{bc}{bd}.$$

अतः हम देखते हैं कि दिए हुए दो भागों का वर्णन वस्तु के $\frac{ad}{bd}$ और $\frac{bc}{bd}$ द्वारा किया जा सकता है। स्पष्टतया एकत्रित दोनों भाग

$$\text{वस्तु का } \frac{ad+bc}{bd}$$

बनते हैं।

किसी वस्तु के भाग का भाग

एक रुपए को लीजिए। इसमें 100 पैसे होते हैं। अब

$$\text{रुपए के } \frac{3}{5} \text{ के } \frac{1}{10}$$

का विचार कीजिए।

रुपए का $\frac{3}{5}$ होता है 60 पैसे और 60 पैसों का $\frac{1}{10}$ होता है 6 पैसे, जो कि रुपए का $\frac{6}{100}$ है। इस प्रकार

$$\frac{1}{10}, \text{ रुपए के } \frac{3}{5} \text{ का} = \text{रुपए का } \frac{6}{100} = \text{रुपए का } \frac{3}{50}.$$

व्यापक रूप में, हम

$$\frac{a}{b} \text{ लेते हैं, किसी आयताकार क्षेत्र के } \frac{c}{d} \text{ का.}$$

निश्चय ही समस्या दिए हुए आयताकार क्षेत्र के c/d को b भागों में बाँटने और उनमें से a लेने की है।

अब

$$\text{क्षेत्र का } \frac{c}{d} = \text{क्षेत्र का } \frac{bc}{bd}.$$

और इस प्रकार क्षेत्र का c/d लेने के लिए हम उसके bd बराबर भागों में से, जिनमें दिया हुआ क्षेत्र बँटा हुआ माना जा रहा है, bc ले सकते हैं।

पुनः हम क्षेत्र के $\frac{c}{d}$ को b बराबर भागों में बाँटते हैं। इस प्रकार प्रत्येक भाग, निश्चय ही

$$\text{क्षेत्र का } \frac{c}{bd} \text{ है।}$$

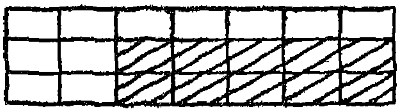
स्पष्टतः ऐसे a भागों में

$$\text{क्षेत्र का } \frac{ac}{bd} \text{ होगा।}$$

अतः निम्नलिखित परिणाम प्राप्त होता है।

$$\frac{a}{b}, \text{आयताकार क्षेत्र के } \frac{c}{d} \text{ का} = \text{उसी क्षेत्र का } \frac{ac}{bd}$$

उदाहरणार्थ, साथ के चित्र में छायित क्षेत्र



$$\frac{2}{3} \text{ है, आयताकार क्षेत्र के } \frac{5}{7} \text{ का,}$$

और स्पष्टतया यह उतना ही है जितना कि

$$\text{क्षेत्र का } \frac{2\times5}{3\times7}$$

अर्थात् 10/21.

किसी वस्तु के भागों की तुलना

मान लीजिए कि हमारे पास

(*i*) रुपए का $\frac{3}{10}$ और (*ii*) रुपए का $\frac{1}{5}$ है।

इन दोनों में से कौन-सा रुपए का बड़ा भाग है ?

अब रुपए का $\frac{1}{5}$ उतना ही है जितना कि रुपए का $\frac{2}{10}$. इसलिए हम देखते हैं कि दो भागों (*i*) और (*ii*) में से, रुपए का $\frac{3}{10}$ बड़ा है।

व्यापक रूप में,

(*i*) किसी आयताकार क्षेत्र का $\frac{a}{b}$ और (*ii*) उसी क्षेत्र का $\frac{c}{d}$ लीजिए।

अब आयताकार क्षेत्र का $\frac{a}{b}$ उतना ही है जितना कि उस क्षेत्र का $\frac{ad}{bd}$

और आयताकार क्षेत्र का $\frac{c}{d}$ उतना ही है जितना कि उस क्षेत्र का $\frac{bc}{bd}$.

अतः हम देखते हैं कि

आयताकार क्षेत्र का $\frac{a}{b}$ बड़ा है उसी क्षेत्र के $\frac{c}{d}$ से

तब और तभी जब $ad > bc$.

यदि a अधिक हो b से तो किसी वस्तु के a/b का अर्थ

अब तक हमने किसी वस्तु के a/b के अर्थ का विचार $a<b$ होने पर ही किया है। अब हम देखेंगे कि इसी धारणा को $b \leqslant a$ होने पर क्या अर्थ दिया जा सकता है।

विचारों के स्थिरीकरण के लिए डबलरोटी का 12/5 लीजिए। स्पष्टतया डबलरोटी के दस-पंचमांश का अर्थ दो पूरी डबलरोटियाँ हैं। इस प्रकार डबल रोटी के बारह-पंचमाँश उस डबलरोटी के दो-पंचमांश सहित दो पूरी डबलरोटियों के तुल्य हैं। अतः

डबलरोटी का $\frac{12}{5}$

कहने के स्थान पर हम

डबलरोटी का $2\frac{2}{5}$

भी कह सकते हैं।

पुनः किसी वस्तु का a/b लीजिए, जहाँ $a > b$.

मान लीजिए कि a को b से भाग देने पर भागफल q और शेष r प्राप्त होते हैं। इस प्रकार

$$a = bq + r, \qquad r < b.$$

यहाँ हम यह मान रहे हैं कि b खण्ड नहीं है a का।

अत:

$$a = bq + r$$

होने पर किसी वस्तु का a/b उतना ही होता है जितना कि उस वस्तु के b बराबर भागों में से r भाग सहित q पूरी वस्तुएँ लेकर होता है।

एक विशेष उदाहरण के रूप में,

$$\text{रुपए का } \frac{13}{5} = \text{रुपए का } 2\frac{3}{5}$$

$$= 2 \text{ रुपए और } 60 \text{ पैसे।}$$

किन्तु यदि $a > b$ और b खण्ड हो a का तो q एक ऐसी संख्या होगी जिसके लिए

$$a = bq$$

और इसलिए किसी वस्तु का a/b बराबर होगा q पूरी वस्तुओं के।

उदाहरणार्थ, डबलरोटी का $\frac{12}{3}$ बराबर है चार डबलरोटियों के। यह भी ध्यान देने योग्य है कि $a = b$ होने पर किसी वस्तु का a/b स्वयं वस्तु का ही सूचक होता है, जैसे डबलरोटी का $3/3$ पूरी डबलरोटी का ही सूचक है।

प्राप्त परिणामों का संक्षेप

कोई ऐसी वस्तु लीजिए जो कितने ही बराबर भागों में बँट सकती हो। हम इस वस्तु को 'व' से व्यक्त करते हैं। विचारों के स्थिरीकरण के लिए 'व' को कोई लंबाई मान लेते हैं।

तब निम्नलिखित परिणाम प्राप्त होते हैं।

I. $$\text{व का } \frac{a}{b} = \text{व का } \frac{c}{d}$$

तब और तभी जब $ad = bc.$

II. व का $\frac{a}{b}$ और व का $\frac{c}{d}$ दोनों मिलकर

व का $\frac{ad+bc}{bd}$ बनाते हैं।

III. $$\frac{a}{b}, \text{ 'व' के } \frac{c}{d} \text{ का} = \text{'व' का } \frac{ac}{bd}$$

IV. 'व' का $\frac{a}{b}$ बड़ा है 'व' के $\frac{c}{d}$ से, तब और तभी जब $ad > bc.$

अभ्युक्ति—अध्याय के इस भाग में वस्तुओं के भागों से संबद्ध विचारों की रूपरेखा दी गई है। ये विचार हमें भिन्नों के समुच्चय की अमूर्त परिभाषा देने में समर्थ बनाते हैं। इस नए समुच्चय में हम योग और गुणन के दो संयोजनों तथा क्रम संबंध की परिभाषा देने की स्थिति में भी हो गए हैं। ठोस अनुभव द्वारा प्राप्त परिणामों का उपयोग, अब अमूर्त परिभाषाओं के प्रेरक सुझावों के रूप में करेंगे।

अत: अब हम वस्तुओं के भागों के ठोस अनुभव के आधार पर अमूर्त संसार में प्रवेश करेंगे। स्थिति ठीक उसी प्रकार की है जैसी ठोस वस्तुओं

1 सेब, 2 सेब, 3 सेब, 4 सेब, इत्यादि

के स्थान पर संख्याओं

1, 2, 3, 4...........

को लेने पर होती है।

22. भिन्नों का समुच्चय

प्रतीकों

$$\frac{a}{b}$$

के समुच्चय को, जहाँ a,b कोई धन-संख्याएँ हैं, भिन्नों का समुच्चय कहते हैं और इसे **F** द्वारा व्यक्त करते हैं।

स्पष्टत: सभी

$$\frac{2}{3},\ \frac{7}{11},\ \frac{13}{25},\ \frac{5}{1},\ \frac{4}{4},\ \frac{13}{3}$$

समुच्चय F के अंग हैं।

F का प्रत्येक अंग भिन्न कहलाता है। अत:

$$\mathbf{F}=\left\{\frac{a}{b}\ :\ a\in\mathbf{N},\ \ b\in\mathbf{N}\right\}.$$

धन-संख्या a तथा धन-संख्या b भिन्न

$$\frac{a}{b}$$

के क्रमश: अंश तथा हर कहलाते हैं।

हम $\frac{a}{b}$ के स्थान पर a/b भी लिखते हैं।

भिन्नों की समता

$$\frac{a}{b},\ \frac{c}{d}$$

कोई दो भिन्न लीजिए।

यदि

$$ad=bc$$

तो हम कहते हैं कि दोनों भिन्न बराबर हैं।

और हम

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

लिखते हैं।

अतः

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow ad=bc.$$

उदाहरणार्थ, हम देखते हैं कि

$$\frac{4}{6}=\frac{6}{9} \text{ क्योंकि } 4\times 9=6\times 6,$$

$$\frac{6}{8}=\frac{3}{4} \text{ क्योंकि } 6\times 4=8\times 3.$$

हम देखते हैं कि यदि

$$\frac{a}{b}\in \mathbf{F} \text{ और } k \in \mathbf{N}$$

तो

$$\frac{a}{b}=\frac{ak}{bk} \text{ क्योंकि } a\ (bk)=b\ (ak).$$

साथ ही यदि h कोई समापवर्तक हो a और b का, अर्थात् a, b दोनों विभाज्य हों h से, और $a\div h$, $b\div h$ धन-संख्याएँ हों, तो

$$\frac{a}{b}=\frac{a\div h}{b\div h}.$$

वास्तव में

$$(a\div h)h=a,\ (b\div h)h=b.$$

अतः किसी भिन्न के अंश और हर को एक ही धन-संख्या से गुणा करने पर अथवा इनके किसी समापवर्तक से भाग देने पर प्राप्त भिन्न, दिए हुए भिन्न के बराबर होता है।

उदाहरणार्थ,

$$\frac{12}{15}=\frac{12\div 3}{15\div 3}=\frac{4}{5}$$

$$\frac{x^2y}{xy^2}=\frac{(x^2y)\div xy}{(xy^2)\div xy}=\frac{x}{y}; \quad x,y\in \mathbf{N}$$

भिन्नों का लघुतम रूप

यदि किसी भिन्न के अंश और हर का 1 के अतिरिक्त कोई और समापवर्तक न हो अर्थात् यदि ये दोनों असहभाज्य हों तो भिन्न अपने लघुतम रूप में कहलाता है।

यदि

$$\frac{a}{b}$$

कोई भिन्न हो तो

$$\frac{c}{d}$$

अपने लघुतम रूप में एक ऐसा भिन्न होगा कि

$$\frac{c}{d}=\frac{a}{b}.$$

वास्तव में यदि धन-संख्याओं a, b का महत्तम समापवर्तक h हो तो

$$a \div h$$
$$b \div h$$

अपने लघुतम रूप में एक ऐसा भिन्न होगा जो दिए हुए भिन्न

$$\frac{a}{b}$$

के बराबर है।

भिन्न का सरलीकरण

हम कहते है कि कोई भिन्न c/d किसी भिन्न a/b से सरल है यदि

$$\frac{c}{d} = \frac{a}{b}$$

और a, b को इनके किसी समापवर्तक से भाग देने पर c, d प्राप्त हुए हों।

प्रश्नावली

1. निम्नलिखित भिन्नों को इनके लघुतम रूप में लिखिए :

(i) $\frac{180}{450}$ (ii) $\frac{990}{1485}$ (iii) $\frac{252}{396}$

(iv) $198/462$ (v) $492/5200$ (vi) $7360/12144$

(vii) $\frac{15 \times 48 \times 30}{25 \times 12 \times 42}$ (viii) $\frac{84 \times 462}{336 \times 260}$ (ix) $\frac{252 \times 342}{420 \times 360}$

2. निम्नलिखित में से कौन से सत्य कथन हैं ?

(i) $\frac{8}{10} \neq \frac{12}{15}$ (ii) $\frac{18}{36} = \frac{1}{3}$ (iii) $\frac{82}{126} = \frac{2}{3}$

3. निम्नलिखित को सत्य कथन बनाने के लिए खाली स्थानों में धन-संख्याएँ रखिए।

(i) $\frac{42}{63} = \frac{2}{—}$ (ii) $\frac{—}{54} = \frac{8}{9}$ (iii) $\frac{42}{126} = \frac{2}{—}$

4. निम्नलिखित को सरल कीजिए; यहाँ वर्ण धन-संख्याओं के सूचक हैं।

(i) $7x/42x$ (ii) a^2/a^3 (iii) $3a^2b^3/9a^3b^2$

(iv) x^2y/xy^3 (v) x^5y/x^7 (vi) $40ab^2x/120a^3x$

(vii) $12acx^2/26a^2c^2x$ (viii) $38a^3b^4c^2/57a^4b^4c$ (ix) $84a^3m^2n/35a^4mn^2$

5. निम्नलिखित को सरल कीजिए ; यहाँ वर्ण धन-संख्याओं के सूचक हैं।

(i) $\frac{x+x^2}{y+xy}$ (ii) $\frac{2m+m^2}{2m+mn}$ (iii) $\frac{2x^2+4xy}{3xy+6y^2}$

(iv) $\frac{7+14x}{7}$ (v) $\frac{ax^2+x^3}{bx^2+ba^2}$ (vi) $\frac{216x+450y}{432x+900y}$

(vii) $\frac{216a+144b+360c}{576a+288b+864c}$ (viii) $\frac{35xz+45yz}{7x+9y}$

6. $$4/11$$

के बराबर ऐसे सभी भिन्न निकालिए जिनके हर 300 से अधिक और 350 से कम हों।

7. $$65/117$$

के बराबर ऐसे सभी भिन्न लिखिए जिनके अंश और हर के योगफल

$$98,\ 140,\ 168$$

हों।

8. परिभाषा द्वारा सिद्ध कीजिए कि

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \text{ और } \frac{c}{d}=\frac{e}{f} \Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{e}{f},$$

$$\frac{a}{b},\ \frac{c}{d},\ \frac{e}{f} \in \mathbf{F}.$$

भिन्नों का योगफल

परिभाषा

कोई दो भिन्न

$$\frac{a}{b},\ \frac{c}{d}$$

लीजिए। परिभाषा के अनुसार

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}.$$

हम कहते हैं कि भिन्न

$$\frac{ad+bc}{bd}$$

भिन्न

$$\frac{a}{b},\ \frac{c}{d}$$

का योगफल है।

टिप्पणी—सबसे पहले हमें यह निश्चय करना होगा कि यदि

$$\frac{a'}{b'},\ \frac{c'}{d'}$$

कोई दो ऐसे भिन्न हों, जिनके लिए

$$\frac{a'}{b'}=\frac{a}{b},\ \frac{c'}{d'}=\frac{c}{d}$$

तो

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a'}{b'}+\frac{c'}{d'}$$

भी होगा।

इसका अर्थ यह हुआ कि दिए हुए दो भिन्नों का योगफल उनके बराबर किन्हीं दूसरे दो भिन्नों के योगफल के बराबर होता है। हम पहले एक विशेष उदाहरण लेते हैं।

दो भिन्न

$$\frac{4}{6},\quad \frac{3}{5}$$

लीजिए। अब

$$\frac{4}{6}+\frac{3}{5}=\frac{4\times 5+3\times 6}{6\times 5}=\frac{38}{30}.$$

साथ ही

$$\frac{4}{6}=\frac{2}{3},\quad \frac{3}{5}=\frac{9}{15}.$$

और

$$\frac{2}{3}+\frac{9}{15}=\frac{2\times 15+3\times 9}{15\times 3}=\frac{57}{45}.$$

यह सरलतापूर्वक देखा जा सकता है कि

$$\frac{38}{30}=\frac{57}{45}.$$

इसी बात को अब हम व्यापक रूप में लेते हैं।

परिभाषा के अनुसार

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$$

$$\frac{a'}{b'}+\frac{c'}{d'}=\frac{a'd'+b'c'}{b'd'}.$$

साथ ही

$$\frac{a'}{b'}=\frac{a}{b}\Rightarrow a'b=ab'$$

$$\frac{c'}{d'}=\frac{c}{d}\Rightarrow c'd=cd'$$

हमें यह सिद्ध करना है कि

$$\frac{ad+bc}{bd}=\frac{a'd'+b'c'}{b'd'}$$

अब

$$\frac{ad+bc}{bd}=\frac{a'd'+b'c'}{b'd'}$$

$$\Leftrightarrow \quad (ad+bc)\ b'd'=(a'd+b'c')bd$$

$$\Leftrightarrow \quad ab'dd'+cd'bb'=a'bdd'+c'dbb'.$$

साथ ही

$$ab'=a'b \Rightarrow ab'dd'=a'bdd'$$

$$cd'=c'd \Rightarrow cd'bb'=c'dbb',$$

और इन दोनों के फलस्वरूप

$$ab'dd'+cd'bb'=a'bdd'+cbd'b',$$

अतः

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}=\frac{a'd'+bc'}{b'd'}=\frac{a'}{b'}+\frac{c'}{d'}.$$

प्रश्नावली

1. निम्नलिखित योगफल निकालिए।

(i) $\frac{2}{3}+\frac{4}{5}$ (ii) $\frac{4}{5}+\frac{2}{3}$

(iii) $\frac{7}{8}+\frac{8}{9}$ (iv) $\frac{8}{9}+\frac{7}{8}$.

2. निम्नलिखित योगफल निकालिए।

(i) $\frac{4}{7}+\left(\frac{13}{12}+\frac{9}{5}\right)$ (ii) $\left(\frac{4}{7}+\frac{13}{12}\right)+\frac{9}{5}$

(iii) $\frac{1}{2}+\left(\frac{2}{3}+\frac{3}{4}\right)$ (iv) $\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\right)+\frac{3}{4}$.

3. सिद्ध कीजिए कि

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}.$$

[यहाँ $\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{ab+cb}{bb}=\frac{(a+c)b}{bb}=\frac{a+c}{b}$.]

भिन्नों के समुच्चय में योग-संयोजन के नियम

हम यह सिद्ध करने जा रहे हैं कि F में योग संयोजन की क्रम-विनिमेयता और सहचारिता दोनों होती हैं।

प्रमेय—भिन्नों के समुच्चय में योग संयोजन की क्रम-विनिमेयता होती है। **अर्थात**

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{c}{d}+\frac{a}{b} \quad \forall \ \frac{a}{b},\ \frac{c}{d}\in \mathbf{F}$$

उपपत्ति

अब

$$\frac{a}{b}=\frac{ad}{bd},$$

$$\frac{c}{d}=\frac{bc}{bd},$$

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}=\frac{bc+ad}{bd}$$

$$=\frac{bc}{bd}+\frac{ad}{bd}=\frac{c}{d}+\frac{a}{b}.$$

यह ध्यान देने योग्य है कि **F** में योग की क्रम-विनिमेयता सिद्ध करने के लिए हमने **N** में योग की क्रम-विनिमेयता का उपयोग किया है।

प्रमेय—भिन्नों के समुच्चय में योग संयोजन की सहचारिता होती है। अर्थात्

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)+\frac{e}{f}=\frac{a}{b}+\left(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right)\ \forall\ \ \frac{a}{b},\ \frac{c}{d},\ \frac{e}{f}\in \mathbf{F}$$

उपपत्ति

अब

$$\frac{a}{b}=\frac{adf}{bdf},\ \frac{c}{d}=\frac{cbf}{dbf},\ \frac{e}{f}=\frac{ebd}{fbd}.$$

साथ ही

$$dbf=bdf=fbd\ ;\ b,\ d, f\in \mathbf{N}.$$

अतः

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)+\frac{e}{f}=\frac{ad+bc}{bd}+\frac{e}{f}$$

$$=\frac{adf+bcf}{bdf}+\frac{ebd}{bdf}$$

$$=\frac{(adf+bcf)+ebd}{bdf}$$

$$=\frac{adf+(bcf+ebd)}{bdf}$$

$$=\frac{adf}{bdf}+\frac{bcf+ebd}{bdf}$$

$$=\frac{a}{b}+\frac{cf+ed}{df}$$

$$=\frac{a}{b}+\left(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right).$$

यह ध्यान देने योग्य है कि ऊपर हमने धन-संख्याओं के समुच्चय में योग और गुणन के क्रम-विनिमेय, साहचर्य और वितरण नियमों का प्रयोग किया है।

टिप्पणी—धन-संख्याओं के समुच्चय में योग के अपवर्तन नियम की भाँति भिन्नों के समुच्चय में भी योग का अपवर्तन नियम होता है। समुच्चय **F** में इस अपवर्तन नियम का उल्लेख और उसकी उपपत्ति इस समुच्चय में 'अधिक है···से' संबंध की परिभाषा के बाद करेंगे।

भिन्नों का गुणनफल मान लीजिए कि

$$\frac{a}{b},\quad \frac{c}{d}\in \mathbf{F}.$$

परिभाषा

हम

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$$

लिखते हैं और भिन्न

$$\frac{ac}{bd}$$

को भिन्नों

$$\frac{a}{b},\ \frac{c}{d}$$

का गुणनफल कहते हैं। हम

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$$

अथवा केवल

$$\frac{a}{b}\,\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$$

भी लिख सकते हैं।

टिप्पणी—**F** में योग संयोजन के प्रसंग की भाँति, हम **F** में गुणन संयोजन के लिए भी सिद्ध करेंगे कि

$$\frac{a'}{b'}=\frac{a}{b} \text{ और } \frac{c'}{d'}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a'}{b'}\cdot\frac{c'}{d'}=\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d},$$

अर्थात् बराबर भिन्नों से प्रतिस्थापित करने पर भी दिए हुए भिन्नों का गुणनफल नहीं बदलता।

अब

$$\frac{a'}{b'}=\frac{a}{b}\Leftrightarrow a'b=ab'$$

$$\frac{c'}{d'}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow c'd=cd'$$

और इनके फलस्वरूप

$$(a'b)(c'd)=(ab')(cd')$$

पुन:

$$\frac{a'}{b'}\cdot\frac{c'}{d'}=\frac{a'c'}{b'd'},\quad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$$

और

$$\frac{a'c'}{b'd'}=\frac{ac}{bd}\Leftrightarrow (a'c')(bd)=(ac)(b'd')$$

$$\Leftrightarrow (a'b)(c'd)=(ab')(cd').$$

अत:

$$\frac{a'}{b'}\cdot\frac{c'}{d'}=\frac{a'c'}{b'd'}=\frac{ac}{bd}=\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\,.$$

प्रश्नावली

1. भिन्नों के निम्नलिखित गुणनफल निकालिए।

(i) $\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}$ (ii) $\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}$

(iii) $\frac{7}{8}\times\frac{11}{13}$ (iv) $\frac{11}{13}\times\frac{7}{8}$

(v) $\frac{3}{4}\times\left(\frac{5}{7}\times\frac{9}{11}\right)$ (vi) $\left(\frac{3}{4}\times\frac{5}{7}\right)\times\frac{9}{11}$

(vii) $\frac{12}{13}\times\left(\frac{3}{4}\times\frac{2}{7}\right)$ (viii) $\left(\frac{12}{13}\times\frac{3}{4}\right)\times\frac{2}{7}$.

2. निम्नलिखित का परिकलन कीजिए।

(i) $\frac{2}{3}\times\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\right)$ (ii) $\left(\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\right)+\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\right)$

(iii) $\frac{5}{7}\times\left(\frac{7}{8}+\frac{8}{9}\right)$ (iv) $\left(\frac{5}{7}\times\frac{7}{8}\right)+\left(\frac{5}{7}+\frac{8}{9}\right)$.

3. भिन्नों के निम्नलिखित गुणनफल निकालिए और उन्हें सरल कीजिए, यहाँ वर्ण धन-संख्याओं के सूचक हैं।

(i) $\frac{2a}{3} \times \frac{3b}{4}$ (ii) $\frac{a^2}{b^2} \times \frac{b}{a}$

(iii) $\frac{3x}{16} \times \frac{4}{y}$ (iv) $\frac{3a^2b}{4} \times \frac{4b^2}{3}$

(v) $\frac{5x^2y^2}{8} \times \frac{8xy}{3}$ (vi) $\frac{9x^2y}{4} \times \frac{2y^3z}{9}$

(vii) $\frac{3ab^2}{4} \times \left(\frac{4b^2c}{5} \times \frac{5ac}{3}\right)$ (viii) $\left(\frac{3ab^2}{4} \times \frac{4b^2c}{5}\right) \times \frac{5ac}{3}$

(ix) $\frac{15xyz}{27xy} \times \left(\frac{9x^2y}{5x^3} \times \frac{17xyz^2}{9}\right)$ (x) $\left(\frac{15xyz}{27xy} \times \frac{9x^2y}{5x3}\right) \times \frac{17xz^2}{9}$

(xi) $\frac{a^2b^2}{ny} \times \left(\frac{xy}{1} \times \frac{7abx}{ax}\right)$

4. सिद्ध कीजिए कि

(i) $\frac{a}{b} \times \frac{1}{1} = \frac{a}{b} \qquad \forall \ \frac{a}{b} \in \mathbf{F}$

(ii) $\frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = \frac{1}{1} \qquad \forall \ \frac{a}{b} \in \mathbf{F}$

F में गुणन संयोजन के नियम

प्रमेय **F** में गुणन संयोजन की क्रम-विनिमेयता होती है।

मान लीजिए कि

$$\frac{a}{b}, \quad \frac{c}{d} \in \mathbf{F}.$$

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

$$= \frac{ca}{db} = \frac{c}{d} \times \frac{a}{b}.$$

अतः

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \times \frac{a}{b} \qquad \forall \ \frac{a}{b}, \quad \frac{c}{d} \in \mathbf{F}.$$

इतः परिणाम।

प्रमेय—भिन्नों के समुच्चय में गुणन-संयोजन की सहचारिता होती है ।

उपपत्ति

मान लीजिए कि

$$\frac{a}{b},\quad \frac{c}{d},\quad \frac{e}{f} \in \mathbf{F}.$$

अब

$$\left(\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}\right) \times \frac{e}{f} = \frac{ac}{bd} \times \frac{e}{f}$$

$$= \frac{(ac)e}{(bd)f}$$

$$= \frac{a(ce)}{b(df)}$$

$$= \frac{a}{b} \times \frac{ce}{df}$$

$$= \frac{a}{b} \times \left(\frac{c}{d} \times \frac{e}{f}\right)$$

इस प्रकार

$$\left(\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}\right) \times \frac{e}{f} = \frac{a}{b} \times \left(\frac{c}{d} \times \frac{e}{f}\right)$$

$$\forall\ \frac{a}{b},\quad \frac{c}{d},\quad \frac{e}{f} \in \mathbf{F}.$$

इतः परिणाम ।

भिन्न $\frac{1}{1}$ का गुणन-नियम

प्रमेय

$$\forall\ \frac{a}{b} \in \mathbf{F},$$

$$\frac{a}{b} \times \frac{1}{1} = \frac{a \times 1}{b \times 1} = \frac{a}{b}.$$

टिप्पणी—ऊपर सिद्ध किए गए नियम के कारण, भिन्न $\frac{1}{1}$ को गुणन-तत्समक कहा जाता है ।

हम इसे एक क-अवयव कहेंगे ।

भिन्न का व्युत्क्रम

प्रमेय—प्रत्येक भिन्न

$$\frac{a}{b}$$

के अनुरूप एक भिन्न

$$\frac{b}{a}$$

होता है जिसके लिए

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = \frac{1}{1} .$$

इस नियम के आधार पर, हम कहते हैं कि $\frac{b}{a}$ भिन्न $\frac{a}{b}$ का गुणन प्रतिलोम है। हम $\frac{b}{a}$ को $\frac{a}{b}$ का व्युत्क्रम भी कहेंगे। निस्सन्देह $\frac{a}{b}$ भी $\frac{b}{a}$ का व्युत्क्रम है।

अतः दो भिन्नों में से प्रत्येक, दूसरे का व्युत्क्रम होता है यदि एक का अंश दूसरे का हर हो और विलोमतः भी। उदाहरणार्थ,

$\frac{7}{11}$ का व्युत्क्रम $\frac{11}{7}$ है,

$\frac{2}{1}$ का व्युत्क्रम $\frac{1}{2}$ है।

F में विभाजन

अब हम भिन्नों के अध्ययन की आवश्यकता से संबद्ध पहले रखे गए विचारों की पुष्टि करने की स्थिति में हैं। यह सिद्ध किया जा सकता है कि :
किन्हीं दो भिन्नों

$$\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$$

के लिए एक ऐसा भिन्न

$$\frac{e}{f}$$

विद्यमान है जिसके लिए

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f} = \frac{c}{d}$$

स्पष्टतः

$$\frac{e}{f} = \frac{bc}{ad}$$

पर्याप्त है क्योंकि

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{bc}{ad}=\frac{abc}{bad}$$

$$=\frac{(abc)\div ab}{(abd)\div ab}=\frac{c}{d}\ .$$

हम

$$\frac{e}{f}=\frac{c}{d}\div\frac{a}{b}$$

लिखते हैं और कहते हैं कि $\frac{c}{d}$ को $\frac{a}{b}$ से भाग देने पर $\frac{e}{f}$ प्राप्त होता है। स्पष्टतः

$$\frac{c}{d}\div\frac{a}{b}=\frac{bc}{ad}\ .$$

अब

$$\frac{c}{d}\div\frac{a}{b}=\frac{cb}{da}=\frac{c}{d}\cdot\frac{b}{a}\ .$$

इसलिए $\frac{c}{d}$ को $\frac{a}{b}$ से भाग देने के लिए, हम $\frac{c}{d}$ को $\frac{a}{b}$ के व्युत्क्रम $\frac{b}{a}$ से गुणा करते हैं।

उदाहरणार्थ

$$\frac{2}{3}\div\frac{3}{5}=\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{3}=\frac{10}{9}$$

$$\frac{7}{8}\div\frac{13}{12}=\frac{7}{8}\cdot\frac{12}{13}=\frac{84}{104}=\frac{21}{26}$$

हम कई बार

$$\frac{c}{d}\div\frac{a}{b}$$

के स्थान पर

$$\frac{c}{d}\Big/\frac{a}{b} \text{ या } \frac{\frac{c}{d}}{\frac{a}{b}}$$

भी लिखते हैं।

अतः भिन्नों के समुच्चय **F** के प्रसंग में, इसका प्रत्येक अंग इसके किसी भी अंग से विभाज्य है। **F** को **N** द्वारा प्रतिस्थापित करने पर यह कथन सत्य नहीं रहता।

प्रश्नावली

1. यदि वर्ण धन-संख्याओं के सूचक हों तो निम्नलिखित भिन्नों के व्युत्क्रम दीजिए।

(i) $\frac{7}{11}$ (ii) $\frac{12}{17}$ (iii) $\frac{22}{27}$

(iv) $\frac{2a}{3}$ (v) $\frac{7a}{6b}$ (vi) $\frac{2}{3a}$

(vii) $\frac{a}{1}$ (viii) $\frac{1}{b}$ (ix) $\frac{a^2}{b^2}$.

2. यदि वर्ण धन-संख्याओं के सूचक हों तो निम्नलिखित को सरल कीजिए।

(i) $\frac{2a^2b^3}{3a^3b^2} \div \frac{5ab^4}{7a^4b^3}$ (ii) $\frac{7mn^2}{5m^3n} \div \frac{3mn}{8m^2n^4}$

(iii) $\frac{4x^2y}{5a^2b} \div \frac{2xy^2}{15ab^2}$ (iv) $\frac{35ab}{8} \div \frac{7a}{2}$

(v) $\frac{5a}{7} \div \frac{2a}{3}$ (vi) $\frac{4x}{y} \div \frac{3y}{x}$

वितरण नियम : भिन्नों के समुच्चय में गुणन योग को वितरित करता है।
हम सिद्ध करेंगे कि

$$\frac{a}{b}\left(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right)=\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}+\frac{a}{b}\cdot\frac{e}{f}$$

$$\forall \frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f} \in \mathbf{F}$$

उत्पत्ति

अब $\frac{a}{b}\left(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right)=\frac{a}{b}\cdot\frac{cf+de}{df}$

$$=\frac{a(cf+ed)}{bdf}$$

$$=\frac{acf+aed}{bdf}$$

$$=\frac{acf}{bdf}+\frac{aed}{bdf}$$

$$=\frac{ac}{bd}+\frac{ae}{bf}$$

$$=\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}+\frac{a}{b}\cdot\frac{e}{f}$$

प्रश्नावली

यदि वर्ण धन-संख्याओं के सूचक हों तो निम्नलिखित को दो विधियों द्वारा सरल कीजिए।

(i) $\frac{2a}{3b}\left(\frac{a}{6b}+\frac{b}{a}\right)$ (ii) $\frac{ab}{1}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$

(iii) $\frac{ab}{a^2+b^2}\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)$ (iv) $\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)$.

23. भिन्नों के समुच्चय में क्रम-संबंध

मान लीजिए कि

$$\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$$

कोई दो भिन्न हैं।
हम पहले देख चुके हैं कि

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow ad=bc.$$

अब हम भिन्नों के समुच्चय **F** में

'अधिक है···से'

संबंध की परिभाषा देंगे।

परिभाषा

हम कहते हैं कि

$$\frac{a}{b} \text{ अधिक है } \frac{c}{d} \text{ से}$$

यदि $ad > bc$

और प्रतीक रूप में

$$\frac{a}{b} > \frac{c}{b}$$

लिखते हैं।

अतः परिभाषा के अनुसार

$$\frac{a}{b} > \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad > bc.$$

साथ ही यदि $\frac{a}{b}$ अधिक हो $\frac{c}{d}$ से, तो हम कहते हैं कि $\frac{c}{d}$ न्यून है $\frac{a}{b}$ से, और इसे इस प्रक
लिखते हैं :

$$\frac{c}{d} < \frac{a}{b}.$$

अतः

$$\frac{c}{d} < \frac{a}{b} \Leftrightarrow \frac{a}{b} > \frac{c}{d}.$$

प्रतीक $\geqslant, \leqslant$.

यदि $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ कोई दो ऐसे भिन्न हों, जिनके लिए

$$\frac{a}{b} > \frac{c}{d} \text{ या } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

तो हम

$$\frac{a}{b} \geqslant \frac{c}{d}$$

लिखते हैं और इसे इस प्रकार पढ़ते हैं :

$\frac{a}{b}$ अधिक है $\frac{c}{d}$ से या बराबर है $\frac{c}{d}$ के ।

ठीक इसी भाँति

$$\frac{a}{b} \leqslant \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad \leqslant bc.$$

उदाहरणार्थ

(i) $\frac{4}{5} > \frac{2}{3}$ (ii) $\frac{11}{13} > \frac{2}{3}$

(iii) $\frac{5}{7} > \frac{3}{7}$.

यह सिद्ध करना आवश्यक है कि यदि

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}, \quad \frac{c}{d} = \frac{c'}{d'},$$

तो

$$\frac{a}{b} > \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a'}{b'} > \frac{c'}{d'}.$$

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} \Leftrightarrow ab' = a'b, \quad \frac{c}{d} = \frac{c'}{d'} \Leftrightarrow cd' = c'd$$

और

$$\frac{a}{b} > \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad > bc.$$

हमें यह सिद्ध करना है कि

$$a'd' > b'c'.$$

इसके लिए हम सिद्ध करते हैं कि $a'd' \neq b'c'$ और $a'd' \not< b'c'$.

अब

$$ad > bc,\ a'd' = b'c' \Rightarrow (ad)\ (b'c') > (bc)\ (a'd')$$

$$ad > bc,\ b'c' > a'd' \Rightarrow (ad)\ (b'c') > (bc)\ (a'd').$$

साथ ही $$ab' = a'b,\ cd' = c'd \Rightarrow (ad)\ (b'c') = (bc)\ (a'd').$$

अतः $$a'd' > b'c',$$

और इसका तुल्य रूप

$$\frac{a'}{b'} > \frac{c'}{d'} \text{ है ।}$$

प्रश्नावली

प्रश्नचिन्ह (?) को उपयुक्त चिह्न $>, <$ या $=$ द्वारा प्रतिस्थापित कीजिए ।

1. (i) $\frac{4}{5}$? $\frac{2}{3}$ (ii) $\frac{7}{8}$? $\frac{9}{11}$ (iii) $\frac{3}{4}$? $\frac{4}{5}$

   (iv) $\frac{22}{36}$? $\frac{33}{54}$ (v) $\frac{9}{11}$? $\frac{7}{8}$ (vi) $\frac{14}{30}$? $\frac{21}{45}$

2. (i) $\frac{3}{4}$? $\frac{7}{8}$ (ii) $\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6}$? $\frac{7}{8} \cdot \frac{5}{6}$

   (iii) $\frac{5}{11}$? $\frac{2}{7}$ (iv) $\frac{5}{11} \cdot \frac{7}{16}$? $\frac{2}{7} \quad \frac{7}{16}$

   (v) $\frac{13}{15}$? $\frac{17}{21}$ (vi) $\frac{13}{15} \cdot \frac{7}{8}$? $\frac{17}{21} \cdot \frac{7}{8}$

3. (i) $\frac{3}{4}$? $\frac{5}{8}$ (ii) $\frac{3}{7} \cdot \frac{5}{6}$? $\frac{7}{8} \cdot \frac{5}{9}$

   (iii) $\frac{5}{13}$? $\frac{3}{7}$ (iv) $\frac{5}{13} \times \frac{7}{17}$? $\frac{2}{9} \times \frac{7}{15}$.

   (v) $\frac{13}{18}$? $\frac{19}{21}$ (vi) $\frac{13}{18} \cdot \frac{5}{8}$? $\frac{17}{23} \cdot \frac{7}{9}$.

4. (i) $\frac{2}{3} ? \frac{3}{4}$ (ii) $\frac{2}{3}+\frac{5}{6} ? \frac{3}{4}+\frac{5}{6}$

(iii) $\frac{7}{11} ? \frac{3}{5}$ (iv) $\frac{7}{11}+\frac{5}{7} ? \frac{3}{5}+\frac{5}{7}$

(v) $\frac{12}{13} ? \frac{14}{15}$ (vi) $\frac{12}{13}+\frac{8}{9} ? \frac{14}{15}+\frac{8}{9}$.

5. (i) $\frac{2}{3} ? \frac{5}{7}$ (ii) $\frac{2}{3} ? \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}+\frac{5}{7}\right) ? \frac{5}{7}$

(iii) $\frac{12}{17} ? \frac{18}{23}$ (iv) $\frac{12}{17} ? \frac{1}{2}\left(\frac{12}{17}+\frac{18}{23}\right) ? \frac{18}{23}$

(v) $\frac{21}{35} ? \frac{17}{19}$ (vi) $\frac{21}{35} ? \frac{1}{2}\left(\frac{21}{35}+\frac{17}{19}\right) ? \frac{17}{19}$

6. भिन्नों के निम्नलिखित सांत समुच्चयों को आरोही और अवरोही क्रमों में विन्यस्त कीजिए। (भिन्नों के किसी सांत समुच्चय को आरोही क्रम में विन्यस्त तब माना जाता है जब इस विन्यास में प्रत्येक भिन्न के बाद इससे बड़ा भिन्न आए। अवरोही क्रम में भी विन्यास की परिभाषा इसी प्रकार होती है।)

(i) $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{7}, \frac{1}{3}, \frac{1}{11}, \frac{1}{13}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}\right\}$

(ii) $\left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{11}{12}, \frac{5}{6}, \frac{14}{15}\right\}$

(iii) $\left\{\frac{3}{1}, \frac{7}{1}, \frac{6}{1}, \frac{8}{1}, \frac{4}{2}\right\}$.

क्रम संबंध 'अधिक है—से' के नियम

त्रिविकल्प नियम—किन्हीं दो भिन्नों

$$\frac{a}{b}, \quad \frac{c}{d}$$

के लिए निम्नलिखित तीन विकल्पों में से एक और केवल एक ही होता है :

(i) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ (ii) $\frac{a}{b}>\frac{c}{d}$ (iii) $\frac{c}{d}>\frac{a}{b}$.

उपपत्ति

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow ad=bc$$

$$\frac{a}{b}> \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad>bc\ .$$

$$\frac{c}{d}>\frac{a}{b} \Leftrightarrow bc>ad\ .$$

साथ ही a, b, c, d के धन-संख्याएँ होने से निम्नलिखित तीन विकल्पों में से एक और केवल एक ही होगा ।

(i) $ad=bc$ (ii) $ad>bc$ (iii) $bc>ad.$

इतः परिणाम ।

संबंध की संक्रामकता

प्रमेय

$$\frac{a}{b}>\frac{c}{d} \text{ और } \frac{c}{d}>\frac{e}{f} \Rightarrow \frac{a}{b}>\frac{e}{f}.$$

उपपत्ति

$$\frac{a}{b}=\frac{adf}{bdf}\ ,\ \frac{c}{d}=\frac{cbf}{bdf}\ ,\ \frac{e}{f}=\frac{ebd}{bdf}\ .$$

अब

$$\frac{a}{b}> \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{abf}{bdf} > \frac{cbf}{bdf} \Rightarrow adf> cbf$$

$$\frac{c}{d}> \frac{e}{f} \Rightarrow \frac{cbf}{bdf} > \frac{ebd}{bdf} \Rightarrow cbf> ebd\ .$$

पुनः

$$adf>cbf \text{ और } cbf>ebd \Rightarrow adf> ebd$$

और

$$adf>ebd \Rightarrow af>be \Rightarrow \frac{a}{b}>\frac{e}{f}.$$

इतः परिणाम ।

योग-संयोजन के साथ 'अधिक है···से' संबंध की संगति । योग का अपवर्तन नियम

प्रमेय

$$\frac{a}{b}>\frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{b}+\frac{e}{f}> \frac{c}{d}+\frac{e}{f}.$$

पहले हम यह सिद्ध करेंगे कि

$$\frac{a}{b} > \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} + \frac{e}{f} > \frac{c}{d} + \frac{e}{f}.$$

उपपत्ति

$$\frac{a}{b} = \frac{adf}{bdf}, \quad \frac{c}{d} = \frac{cbf}{dbf}, \quad \frac{e}{f} = \frac{ebd}{fbd}$$

अब

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b} > \frac{c}{d} &\Rightarrow \frac{adf}{bdf} > \frac{cbf}{dbf} \\
&\Rightarrow adf > cbf \\
&\Rightarrow adf + ebd > cbf + ebd \\
&\Rightarrow \frac{adf + ebd}{bdf} > \frac{cbf + ebd}{bdf} \\
&\Rightarrow \frac{adf}{bdf} + \frac{ebd}{bdf} > \frac{cbf}{bdf} + \frac{ebd}{bdf} \\
&\Rightarrow \frac{a}{b} + \frac{e}{f} > \frac{c}{d} + \frac{e}{f}.
\end{aligned}$$

विलोमतः हम सिद्ध करेंगे कि

$$\frac{a}{b} + \frac{e}{f} > \frac{c}{d} + \frac{e}{f} \Rightarrow \frac{a}{b} > \frac{c}{d}.$$

उपपत्ति—यह दिया हुआ है कि

$$\frac{a}{b} + \frac{e}{f} > \frac{c}{d} + \frac{e}{f}$$

अब

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} + \frac{e}{f} = \frac{c}{d} + \frac{e}{f}$$

$$\frac{c}{d} > \frac{a}{b} \Rightarrow \frac{c}{d} + \frac{e}{f} > \frac{a}{b} + \frac{e}{f}.$$

त्रिविकल्प नियम के फ़लस्वरूप, यह सिद्ध हुआ कि

$$\frac{a}{b} + \frac{e}{f} > \frac{c}{d} + \frac{e}{f} \Rightarrow \frac{a}{b} > \frac{c}{d}.$$

इतः परिणाम ।

उपप्रमेय

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{b}+\frac{e}{f}=\frac{c}{d}+\frac{c}{f}.$$

गुणन-संयोजन के साथ 'अधिक है—से' संबंध की संगति। गुणन का अपवर्तन नियम

प्रमेय

$$\frac{a}{b}>\frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f}>\frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}.$$

पहले हम सिद्ध करते हैं कि

$$\frac{a}{b}>\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f}>\frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}.$$

उपपत्ति

$$\begin{aligned}\frac{a}{b}>\frac{c}{d} &\Rightarrow ad>bc\\ &\Rightarrow (ad)(ef)>(bc)(ef)\\ &\Rightarrow (ad)(ef)>(ce)(bf)\\ &\Rightarrow (ae)(df)>(ce)(bf)\\ &\Rightarrow \frac{ae}{bf}>\frac{ce}{df}\\ &\Rightarrow \frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f}>\frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}.\end{aligned}$$

अब हम इसका विलोम अर्थात्

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f}>\frac{c}{d} \cdot \frac{c}{f} \Rightarrow \frac{a}{b}>\frac{c}{d}$$

सिद्ध करेंगे।

उपपत्ति—यह दिया हुआ है कि

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f}>\frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}.$$

अब

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f}=\frac{c}{d} \cdot \frac{c}{f}$$

$$\begin{aligned}\frac{c}{d}>\frac{a}{b} &\Rightarrow \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}>\frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f}\\ &\Leftrightarrow \frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f}<\frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}\end{aligned}$$

अतः

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f} > \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f} \Rightarrow \frac{a}{b} > \frac{c}{d} .$$

उपप्रमेय

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f} = \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f} .$$

क्रम संबंध के प्रयोग के बिना भी यह परिणाम सिद्ध किया जा सकता था। वास्तव में

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f} = \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f} \Leftrightarrow \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f}\right)\frac{f}{e} = \left(\frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}\right)\frac{f}{e}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{b}\left(\frac{e}{f} \cdot \frac{f}{e}\right) = \frac{c}{d}\left(\frac{e}{f} \cdot \frac{f}{e}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{1} = \frac{c}{d} \cdot \frac{1}{1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} .$$

24 व्यवकलन

प्रमेय—किन्हीं दो भिन्नों

$$\frac{a}{b}, \quad \frac{c}{d}$$

के लिए यदि

$$\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$$

तो एक और केवल एक ही ऐसा भिन्न

$$\frac{e}{f}$$

विद्यमान है इसके लिए

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} + \frac{e}{f}.$$

उपपत्ति

अब

$$\frac{a}{b} > \frac{c}{d} \Rightarrow ad > bc.$$

पुनः

$ad > bc \Rightarrow \exists x \in \mathbf{N}$ जिसके लिए
$ad = bc + x$

$$\Rightarrow \frac{ad}{bd}=\frac{bc+x}{bd}$$

$$\Rightarrow \frac{ad}{bd}=\frac{bc}{bd}+\frac{x}{bd}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{c}{d}+\frac{x}{bd}\ .$$

अतः अपेक्षित भिन्न $x/(bd)$ है।

निश्चय ही $x=ad-bc$ और इसलिए अपेक्षित भिन्न

$$\frac{ad-bc}{bd}\quad \text{है।}$$

अब हम इसकी अद्वितीयता सिद्ध करेंगे।
यदि संभव हो तो मान लीजिए कि

$$\frac{e}{f},\quad \frac{e'}{f'}$$

दो ऐसे भिन्न हैं जिनके लिए

$$\frac{c}{d}+\frac{e}{f}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}+\frac{e'}{f'}.$$

तब

$$\frac{c}{d}+\frac{e}{f}=\frac{c}{d}+\frac{e'}{f'}\Rightarrow \frac{e}{f}=\frac{e'}{f'}\ .$$

अद्वितीयता सिद्ध हुई।

परिभाषा हम लिखते हैं कि

$$\frac{e}{f}=\frac{a}{b}-\frac{c}{d}\ .$$

अतः

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{bd}\ .$$

हम देखते हैं कि

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{e}{f}\Leftrightarrow \frac{a}{b}=\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\ .$$

यह ध्यान देने योग्य है कि

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}$$

तब और तभी सार्थक है जब

$$\frac{a}{b}>\frac{c}{d}\ .$$

प्रमेय यदि

$$\frac{a}{b}, \quad \frac{c}{d}, \quad \frac{e}{f}$$

तीन ऐसे भिन्न हों, जिनके लिए

$$\frac{a}{b} > \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right)$$

तो

$$\frac{a}{b} - \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right) = \left(\frac{a}{b} - \frac{c}{d}\right) - \frac{e}{f}.$$

उपपत्ति g/h एक ऐसा भिन्न विद्यमान है जिसके लिए

$$\frac{a}{b} = \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right) + \frac{g}{h} = \frac{c}{d} + \left(\frac{e}{f} + \frac{g}{h}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{e}{f} + \frac{g}{h}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{a}{b} - \frac{c}{d}\right) - \frac{e}{f} = \frac{g}{h} = \frac{a}{b} - \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right)$$

अत:

$$\frac{a}{b} - \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right) = \left(\frac{a}{b} - \frac{c}{d}\right) - \frac{e}{f}.$$

टिप्पणी

$$\frac{a}{b} > \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b} > \frac{c}{d} \text{ और } \frac{a}{b} > \frac{e}{f}.$$

25. दशमलव भिन्न

परिभाषा—किसी भिन्न

$$\frac{a}{b}$$

को **दशमलव भिन्न** तब कहते हैं जब वह किसी ऐसे भिन्न के बराबर हो जिसका हर *10* का कोई घात, अर्थात् $10^1, 10^2, 10^3$ इत्यादि हो।

उदाहरणार्थ

$$\frac{3}{10}, \quad \frac{27}{100}, \quad \frac{31}{1000}$$

दशमलव भिन्न हैं।

पुनः

$$\frac{1}{2}, \quad \frac{3}{5}, \quad \frac{7}{25}$$

में से प्रत्येक भिन्न दशमलव भिन्न है क्योंकि

$$\frac{1}{2}=\frac{5}{10}$$

$$\frac{3}{5}=\frac{6}{10}$$

$$\frac{7}{25}=\frac{28}{100}.$$

निष्कर्ष यह हुआ कि कोई भिन्न दशमलव भिन्न तब होता है जब इसके लघुतम रूप के हर के अभाज्य गुणन खंडन में आने वाले गुणन खंड केवल 2 और (या) 5 हों।

उदाहरणार्थ भिन्न

$$\frac{7}{2^4},$$

जिसका हर 2 का घात है, एक दशमलव भिन्न है क्योंकि

$$\frac{7}{2^4}=\frac{7\times 5^4}{2^4\times 5^4}=\frac{7\times 5^4}{10^4}.$$

पुनः

$$\frac{3}{5^3}$$

एक दशमलव भिन्न है क्योंकि

$$\frac{3}{5^3}=\frac{3\times 2^3}{5^3\times 2^3}=\frac{3\times 2^3}{10^3}.$$

प्रश्नावली

निम्नलिखित भिन्नों में से कौन-से दशमलव भिन्न हैं ?

(*i*) $\frac{1}{2}$ (*ii*) $\frac{21}{75}$ (*iii*) $\frac{6}{14}$

(*iv*) $\frac{1}{15}$ (*v*) $\frac{3}{5}$ (*vi*) $\frac{7}{20}$.

दशमलव भिन्नों के लिए संकेत पद्धति (दशमलव संकेतन)।

एक दशमलव भिन्न

$$\frac{27}{100}$$

लीजिए अब

$$\frac{27}{100}=\frac{2\times10+7}{100}=\frac{2\times10}{100}+\frac{7}{100}$$
$$=\frac{2}{10}+\frac{7}{10^2}$$

इसे हम

·27 लिखेंगे।

पुनः $\frac{3}{4}$ लीजिए। अब

$$\frac{3}{4}=\frac{3\times25}{4\times25}=\frac{75}{100}=\frac{7\times10+5}{100}$$
$$=\frac{7}{10}+\frac{5}{10^2}=\cdot75.$$

अब हम इस स्थिति के विलोम का विचार करेंगे। उपर्युक्त वर्णन के आधार पर

$$37\cdot234=3\times10+7+\frac{2}{10}+\frac{3}{10^2}+\frac{4}{10^3}$$
$$=37+\frac{200}{10^3}+\frac{30}{10^3}+\frac{4}{10^3}$$
$$=37+\frac{200+30+4}{10^3}=37\ \frac{234}{10^3}$$
$$=37\ \frac{234}{1000}=\frac{37234}{1000}.$$

प्रश्नावली

1. निम्नलिखित को दशमलव संकेतन द्वारा व्यक्त कीजिए।

(i) $\frac{13}{20}$ (ii) $\frac{15}{32}$ (iii) $\frac{7}{125}$

(iv) $\frac{19}{250}$ (v) $\frac{17}{320}$ (vi) $\frac{217}{160}$.

2. निम्नलिखित को a/b के रूप में व्यक्त कीजिए।

(i) ·324 (ii) 2·0123 (iii) 27·45

(iv) 2·123 (v) ·1357 (vi) 31·1234.

प्रमेय

दो दशमलव भिन्नों के योगफल और गुणनफल दशमलव भिन्न होते हैं।

उपपत्ति—दो दशमलव भिन्न

$$\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$$

लीजिए। हम मान लेते हैं कि ये अपने लघुतम रूप में हैं। अब

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+cb}{bd}.$$

क्योंकि b, d में केवल 2 और 5 अभाज्य खंड हैं, हम देखते हैं कि इनके गुणनफल में 2 और 5 के अतिरिक्त कोई और अभाज्य खंड नहीं हो सकता।

पुनः क्योंकि

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$$

इसलिए योगफल के प्रकरण के ठीक समान

$$\frac{ac}{bd}$$

भी एक दशमलव भिन्न है।

अंतर का प्रकरण—दो दशमलव भिन्न

$$\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$$

लीजिए जिनमें

$$\frac{a}{b}>\frac{c}{d}.$$

यहाँ इनका अंतर

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}$$

एक भिन्न है और

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-cb}{bd}.$$

अतः पहले की भाँति यदि दो दशमलव भिन्नों का अंतर विद्यमान हो तो वह भी दशमलव भिन्न होगा।

विभाजन का प्रकरण—यदि

$$\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$$

कोई दो दशमलव भिन्न हों तो

$$\left(\frac{a}{b}\right) \div \left(\frac{c}{d}\right) = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

दशमलव भिन्न नहीं भी हो सकता।

उदाहरण के लिए दशमलव भिन्न

$$\frac{1}{4}, \frac{7}{10}$$

लीजिए। अब

$$\frac{1}{4} \div \frac{7}{10} = \frac{1}{4} \times \frac{10}{7} = \frac{5}{14}.$$

निश्चय ही $\frac{5}{14}$ दशमलव भिन्न नहीं है क्योंकि इसके इस लघुतम रूप के हर में 2 और 5 से विभिन्न एक अभाज्य खंड 7 भी है।

टिप्पणी—यहाँ हमारा दशमलव संकेतन में दिए हुए दशमलव भिन्नों के योग और गुणन की विधियों के विवेचन का विचार नहीं है। वास्तव में यह सामान्य दशमलव संकेतन में दी हुई धन-संख्याओं के योग और गुणन की विधियों का केवल विस्तार ही है।

प्रश्नावली

1. निम्नलिखित का विन्यास आरोही क्रम में कीजिए।

   3·273, 3·365, 2·476, 1·587, 3·373, 2·374.

2. कथन को सत्य बनाने के लिए प्रश्न चिह्न (?) को 'के बराबर है', 'अधिक है—से' या 'न्यून है—से' के चिह्नों द्वारा प्रतिस्थापित कीजिए।

   (*i*) 2·732 ? 2·645 (*ii*) 1·317 ? 1·326

   (*iii*) 9·123 ? 8·345 (*iv*) 7·234 ? 7·142.

26. भिन्नों के समुच्चय की क्रम-घनता

भिन्नों के समुच्चय के प्रसंग में क्रम-संबंध का एक ऐसा नियम है जो धन-संख्याओं के समुच्चय के प्रसंग में इसी संबंध के लिए नहीं होता। इस नियम का वर्णन भिन्नों के समुच्चय की **क्रम-घनता** के रूप में किया जाता है।

किन्तु, इस नियम का वर्णन करने से पूर्व हम **मध्यता** की धारणा का परिचय देते हैं।

मान लीजिए कि

$$\frac{a}{b}, \quad \frac{c}{d}$$

दो ऐसे भिन्न हैं जिनके लिए

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d}, \; a, b, c, d \in \mathbf{N}.$$

हम कहते है कि भिन्न

$$\frac{e}{f}$$

दी हुई भिन्नों

$$\frac{a}{b}, \quad \frac{c}{d}$$

के मध्य में है, यदि

$$\frac{a}{b} < \frac{e}{f} < \frac{c}{d}.$$

उदाहरण (*i*) $\frac{1}{3}$ मध्य में है $\frac{1}{5}$ और $\frac{1}{2}$ के और

(*ii*) 3·78 मध्य में है 3·77 और 3·79 के।

अब हम एक प्रमेय का उल्लेख और उसकी उपपत्ति करेंगे।

प्रमेय दो विभन्न. भिनों के मध्य में कोई न कोई भिन्न अवश्य होता है।

उपपत्ति—

कोई दो विभिन्न भिन्न a/b, c/d लीजिए। हम सिद्ध करेंगे कि भिन्न

$$\frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)$$

दिए हुए भिन्नों a/b, c/d के मध्य में है।

व्यापकता की किसी हानि के बिना यह माना जा सकता है कि

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d}.$$

अब

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{a}{b} + \frac{a}{b} < \frac{a}{b} + \frac{c}{d}$$

$$\Rightarrow \quad \left[\frac{1}{1} + \frac{1}{1}\right]\frac{a}{b} < \frac{a}{b} + \frac{c}{d}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2}{1} \cdot \frac{a}{b} < \frac{a}{b} + \frac{c}{d}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{a}{b} < \frac{1}{2}\left\{\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right\}$$

पुनः

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} < \frac{c}{d} + \frac{c}{d}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} < \left\{\frac{1}{1} + \frac{1}{1}\right\}\frac{c}{d}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} < \frac{2}{1} \cdot \frac{c}{d}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\left\{\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right\} < \frac{c}{d}.$$

अतः सिद्ध हुआ कि

$$\frac{a}{b} < \frac{1}{2}\left\{\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right\} < \frac{c}{d}.$$

उपप्रमेय—दो विभिन्न भिन्नों के मध्य में भिन्नों की अनंत संख्या होती है।

मान लीजिए कि भिन्न e/f भिन्नों a/b और c/d के मध्य में है। तब a/b और e/f के मध्य में भी एक भिन्न, जैसे g/h, अवश्य होगा।

अब

$$\frac{a}{b} < \frac{g}{h} < \frac{e}{f} < \frac{c}{d}.$$

स्पष्टतया इस प्रक्रिया की आवृत्ति अनंत बार हो सकती है।

इतः परिणाम।

इस नियम की अभिव्यक्ति यह कह कर की जाती है कि भिन्नों का समुच्चय **क्रम-घन** है।

निश्चय ही यह नियम धन-संख्याओं के समुच्चय में क्रम-संबंध के लिए सत्य नहीं रहता। उदाहरणार्थ, धन-संख्याओं के युग्मों

$$3,\ 4;\ 5,\ 6$$

के मध्य में कोई धन-संख्या नहीं होती।

वास्तव में हम क्रमागत धन-संख्याओं की बात तो कर सकते हैं, किन्तु क्रमागत भिन्नों की बात नहीं कर सकते।

प्रश्नावली

1. निम्नलिखित में से प्रत्येक के मध्य में कोई पाँच भिन्न लिखिए।

(i) $\frac{1}{3},\ \frac{2}{3}$ (ii) $\frac{17}{1},\ \frac{18}{1}$

(iii) $\frac{1}{5},\ \frac{1}{4}$ (iv) $\frac{8}{9},\ \frac{7}{8}$

(v) $\frac{13}{14},\ \frac{11}{12}$ (vi) $\frac{17}{19},\ \frac{9}{13}$

(vii) ·12, ·09 (viii) ·573, ·637.

2. सिद्ध कीजिए कि

$$\frac{1}{3}\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)$$

मध्य में है $\frac{a}{b},\ \frac{c}{d}$ के।

27. भिन्नों के समुच्चय के उपसमुच्चय के रूप में धन-संख्याओं का समुच्चय

सामान्य संकेतन

हम प्रत्येक धन-संख्या n के साथ भिन्न $\frac{n}{1}$ का संबंध जोड़ते हैं। इस प्रकार जब कभी हमारे सम्मुख कोई भिन्न $\frac{n}{1}$ अथवा इसके बराबर कोई भिन्न $\frac{kn}{k}$ आए तो हम अपनी इच्छानुसार इसे n द्वारा प्रतिस्थापित कर सकते हैं।

किन्तु यह देखना आवश्यक है कि इसके परिणामस्वरूप किसी भ्रम की आशंका नहीं रहती।

N के अंगों

$$m,\ n,\ k,\ l$$

के बीच

$$k=m+n,\ l=m\ n$$

संबंधों का विचार कीजिए। यह देखा जा सकता है कि यदि हम k, l, m, n का आख्यान क्रमशः

$$\frac{k}{1},\ \frac{l}{1},\ \frac{m}{1},\ \frac{n}{1}$$

के रूप में करें तो भी उपर्युक्त समताएँ ज्यों की त्यों बनी रहेंगी। वास्तव में

$$\frac{m}{1}+\frac{n}{1}=\frac{m+n}{1}=\frac{k}{1}$$

$$\frac{m}{1}\cdot\ \frac{n}{1}=\frac{mn}{1}=\frac{l}{1}.$$

अब मान लीजिए कि

$$m > n.$$

$$\frac{m}{1}>\frac{n}{1} \Leftrightarrow m.1 > n.1 \Leftrightarrow m > n.$$

अतः हम

$\frac{m}{1}$ को m द्वारा

प्रतिस्थापित करना स्वीकार करते हैं, और विलोमतः भी।

अंततः हम देखते हैं कि यदि $\frac{a}{b}$ कोई भिन्न हो,

तो

$$\frac{a}{b}=\left(\frac{a}{1}\right)\div\left(\frac{b}{1}\right)=a\div b$$

इस प्रकार यह माना जा सकता है कि प्रत्येक भिन्न $\frac{a}{b}$ प्राप्त होता है a को b से भाग देने पर।

अतः हम प्रत्येक धन-संख्या को एक भिन्न मान सकते हैं क्योंकि हम धन-संख्या n और भिन्न $\frac{n}{1}$ में कोई भेद नहीं करते। इस दृष्टिकोण के आधार पर धन-संख्याओं का समुच्चय **N** भिन्नों के समुच्चय **F** का एक उपसमुच्चय है। अर्थात् प्रतीकरूप में

$$\mathbf{N}\subset\mathbf{F}$$

निस्संदेह **N** एक वास्तविक उपसमुच्चय है **F** का अर्थात् **F** में कुछ ऐसे अंग भी हैं जो **N** के अंग नहीं, जैसे 2/3, 7/9.

28. संक्षेप

भिन्नों का समुच्चय **F** निम्नलिखित रूप में व्यक्त किया जाता है :

$$\mathbf{F} = \left\{\frac{a}{b}\ : a\in\mathbf{N},\ b\in\mathbf{N}\right\}$$

नीचे हम **F** के किसी अंग को एक ही वर्ण द्वारा सूचित करेंगे। इस प्रकार x, y, z, u, v, इत्यादि **F** के किसी अंग के सूचक होंगे।

निस्संदेह यह ध्यान रखना आवश्यक है कि x, y इत्यादि में से प्रत्येक a/b के रूप में है। यहाँ a, b धन-संख्याएँ हैं।

F में योग संयोजन

F के अंगों के प्रत्येक युग्म x, y के अनुरूप **F** का एक अंग होता है जिसे $x+y$ द्वारा सूचित करते हैं और इसे युग्म का योगफल कहते हैं। साथ ही **F** के अंगों के युग्म x, y के साथ **F** के अंग $x+y$ का यह संबंध **F** में योग-संयोजन कहलाता है।

F में योग-संयोजन के निम्नलिखित नियम हैं :

1. **F** में योग-संयोजन की क्रमविनिमेयता है, अर्थात्

$$x+y=y+x \; \forall x, y \in \mathbf{F}.$$

2. **F** में योग-संयोजन की सहचारिता है, अर्थात्

$$x+(y+z)=(x+y)+z \; \forall \; x, y, z \in \mathbf{F}.$$

3. **F** में योग-संयोजन का अपवर्तन-नियम होता है, अर्थात्

$$x+z=y+z \Rightarrow x=y; \; x, y, z \in \mathbf{F}.$$

F में गुणन-संयोजन

F के अंगों के प्रत्येक युग्म x, y के अनुरूप **F** का एक अंग होता है जिसे xy द्वारा सूचित करते हैं और इसे युग्म का गुणनफल कहते हैं। साथ ही **F** के अंगों के युग्म x, y का **F** के इस अंग xy के साथ यह संबंध **F** में गुणन-संयोजन कहलाता है। इस गुणन-संयोजन के निम्नलिखित नियम हैं :

4. **F** में गुणन-संयोजन की क्रम-विनिमेयता है, अर्थात्

$$xy=yx \; \forall x, y \in \mathbf{F}.$$

5. **F** में गुणन-संयोजन की सहचारिता है, अर्थात्

$$x(yz)=(xy)z \; \forall x, y, z \in \mathbf{F}.$$

6. **F** का अंग 1 ऐसा है जिसके लिए

$$x\,1=1.x=x \; \forall x \in \mathbf{F}.$$

संख्या 1 को एकक-अवयव कहते है।

7. प्रत्येक $x \in \mathbf{F}$ के अनुरूप $y \in \mathbf{F}$ होता है जिसके लिए

$$xy=1=yx.$$

x और y एक दूसरे के व्युत्क्रम कहलाते हैं।

8. गुणन योग को वितरित करता है, अर्थात्

$$x(y+z)=xy+xz \quad \forall x,y,z \in \mathbf{F}.$$

F में क्रम-संबंध—**F** में 'अधिक है···से' नामक एक संबंध होता है। इसके निम्नलिखित नियम हैं :

9. त्रिविकल्प नियम—**F** के किन्हीं दो अंगों x, y के लिए निम्नलिखित तीन विकल्पों में से एक और केवल एक ही होता है :

(i) $x>y$ (ii) $y>x$ (iii) $x=y$.

10. संक्रामकता नियम

$x>y$ और $y>z \Rightarrow x,>z,\ x,y,z \in \mathbf{F}.$

11. योग के साथ संगति

$x>y \Leftrightarrow x+y>x+z,\ x,\ y,\ z \in \mathbf{F}.$

12. गुणन के साथ संगति

$x>y \Leftrightarrow xz>yz,\ x,\ y,\ z \in \mathbf{F}.$

F में विभाजन

यदि **F** के कोई दो अंग x, y हों तो ऐसा $z \in \mathbf{F}$ होता है जिसके लिए

$$x \doteq yz.$$

हम

$$x \div y = z \text{ या } \frac{x}{y}=z \text{ या } x/y=z$$

लिखते हैं और तब

$$x \div y = z \Leftrightarrow x=yz.$$

भिन्न का व्युत्क्रम—कोई भिन्न x लीजिए।

अब

$$x=\frac{a}{b},\ a,\ b \in \mathbf{N}.$$

$\frac{a}{b}$ का व्युत्क्रम भिन्न $\frac{b}{a}$ होता है।

अब

$$\frac{1}{x}=\left(\frac{1}{1}\right) \div \left(\frac{a}{b}\right)=\frac{b}{a}.$$

इस प्रकार x के व्युत्क्रम को

$$\frac{1}{x}$$

के रूप में व्यक्त कर सकते हैं।

निस्संदेह

$$x \cdot \frac{1}{x} = 1 .$$

हम यह भी सिद्ध करेंगे कि

$$\frac{x}{y} = x \cdot \frac{1}{y} .$$

अब

$$\left(x . \frac{1}{y} \right) y = x \left(\frac{1}{y} . y \right) = x . 1 = x.$$

और इस प्रकार

$$\left(x . \frac{1}{y} \right) y = x$$

$$\Rightarrow x \cdot \frac{1}{y} = \frac{x}{y} .$$

F में व्यवकलन— यदि **F** के दो अंग x, y ऐसे हों जिनमें $x > y$, तो ऐसा $z \in \mathbf{F}$ विद्यमान होता जिसके लिए

$$x = y + z.$$

हम

$$x - y = z$$

लिखते हैं और तब

$$x = y + z \Leftrightarrow x - y = z.$$

टिप्पणी—हम देख चुके हैं कि जब $a, b, c, d \in \mathbf{N}$, तो

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow ad = bc$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

$$\frac{a}{b} > \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad > bc.$$

अब यह सिद्ध किया जाएगा कि धन-संख्याओं a, b इत्यादि के स्थान पर $\mathbf{F}$ में निहित कोई भी संख्याएँ x, y इत्यादि लेने पर इसी प्रकार के परिणाम प्राप्त होते हैं।

अतः हम यह सिद्ध करेंगे कि

$$I \quad \frac{u}{x} = \frac{v}{y} \Leftrightarrow uy = vx$$

$$II \quad \frac{u}{x} + \frac{v}{y} = \frac{uy+vx}{xy}$$

$$III \quad \frac{u}{x} \cdot \frac{v}{y} = \frac{uv}{xy}$$

$$IV \quad \frac{u}{x} > \frac{v}{y} \Leftrightarrow uy > vx.$$

इनमें u, v, x, y समुच्चय $\mathbf{F}$ के किन्हीं अंगों के सूचक हैं अर्थात् u, v, x, y कोई भी भिन्न हैं।

I.

$$\frac{u}{x} = \frac{v}{y}$$

$$\Leftrightarrow u\frac{1}{x} = v\frac{1}{y}$$

$$\Leftrightarrow u\frac{1}{x}\left(xy\right) = \left(v\frac{1}{y}\right)(xy)$$

$$\Leftrightarrow u\left(\frac{1}{x}x\right)y = v\left(y\frac{1}{y}\right)x$$

$$\Leftrightarrow u.\,1.\,y = v.\,1.\,x$$

$$\Leftrightarrow uy = vx.$$

II.

$$xy\left(\frac{u}{x}+\frac{v}{y}\right) = xy\left(\frac{u}{x}\right)+xy\left(\frac{v}{y}\right)$$
$$= (xy)\left(u\,\frac{1}{x}\right)+(xy)\left(v\,\frac{1}{y}\right)$$
$$= (yx)\left(\frac{1}{x}\cdot u\right)+(xy)\left(\frac{1}{y}\,v\right)$$
$$= y\left(x.\frac{1}{x}\right)u + x\left(y.\frac{1}{y}\right)v$$
$$= y.\,1.\,u + x.\,1.\,v$$
$$= uy+xv.$$

विभाजन की परिभाषा के फलस्वरूप

$$\frac{u}{x}+\frac{v}{y}=\frac{yu+xv}{xy}=\frac{uy+vx}{xy}.$$

III.

$$\frac{u}{x}\cdot\frac{v}{y}=\left(u.\frac{1}{x}\right)\left(v.\frac{1}{y}\right)$$
$$= u\left(\frac{1}{x}.v\right)\frac{1}{y}$$
$$= u\left(v.\frac{1}{x}\right)\frac{1}{y}$$
$$= uv\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{y}\right)$$

साथ ही

$$(xy)\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{y}\right)= xy\left(\frac{1}{y}\cdot\frac{1}{x}\right)=x\left(y.\frac{1}{y}\right)\frac{1}{x}$$
$$= x.\,1.\frac{1}{x}= x.\frac{1}{x}=1,$$

और इसके फलस्वरूप

$$\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{y}=\frac{1}{xy}.$$

अत:

$$\frac{u}{x} \cdot \frac{v}{y} = uv.\frac{1}{xy} = \frac{uv}{xy}.$$

IV.

$$\frac{u}{x} > \frac{v}{y}$$

$$\Leftrightarrow \quad xy \left(\frac{u}{x}\right) > (xy) \ \frac{v}{y}$$

$$\Leftrightarrow \quad (xy) \left(u. \frac{1}{x}\right) > (xy) \left(v. \frac{1}{y}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad (yx) \left(\frac{1}{x}. u\right) > (xy) \left(\frac{1}{y}. v\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad y \left(x. \frac{1}{x}\right) u > x \left(y. \frac{1}{y}\right) v$$

$$\Leftrightarrow \quad y.1.u > x.1.v$$

$$\Leftrightarrow \quad yu > xv$$

$$\Leftrightarrow \quad uy > vx.$$

29. बीजीय व्यंजक

यदि किसी व्यंजक में आने वाली संख्याएँ और चर रूप में आने वाले वर्ण आपस में योग, व्यवकलन, गुणन और विभाजन की संक्रियाओं से जुड़े हों, तथा चरों के प्रभाव-क्षेत्र संख्याओं के समुच्चय हों तो उसे बीजीय व्यंजक कहते हैं। यहाँ हम ऐसे व्यंजकों का विचार करेंगे जिनमें आने वाले चरों का प्रभाव-क्षेत्र भिन्नों का समुच्चय **F** हो।

हम यह फिर बतला दें कि प्रतीक

$$x^n$$

जिसमें

$$n \in \mathbf{N} \text{ और } x \in \mathbf{F},$$

x के अपने ही साथ n बार गुणन के फल का सूचक है।

अतः

$$x^n = \underbrace{x.x.x\cdots\cdots x}_{n \text{ बार}},\ x \in \mathbf{F},\ \ n \in \mathbf{N}.$$

नीचे हम कुछ बीजीय व्यंजक दे रहे हैं।

$$(i)\quad 2x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{7}{11}$$

$$(ii)\quad \frac{x+y}{x^2+y^2}$$

$$(iii)\quad \frac{\cdot 32x + \frac{2y}{3}}{5x^2+7y^3}.$$

यह कहना उचित होगा कि प्रायः किसी बीजीय व्यंजक को योग और गुणन के नियमों की सहायता से सरलतर रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

उदाहरण

1. निम्नलिखित को योगफल के रूप में लिखिए।

$$(x^2+11x+24)(x+4) \text{ जहाँ } x \in \mathbf{F}.$$

नीचे ऐसा करते हुए हम **F** में क स व नियमों का प्रयोग करेंगे।

अब

$$\begin{aligned}(x^2+11x+24)(x+4)\\ &= (x^2+11x+24)\,x+(x^2+11x+24)\ 4\\ &= (x^2.x+11x.x+24.x)+(x^2.4+11x.4+24.4)\\ &= (x^3+11x^2+24x)+(4x^2+44x+96)\\ &= x^3+(11+4)x^2+(24+44)x+96\\ &= x^3+15x^2+68x+96.\end{aligned}$$

2. सिद्ध कीजिए कि

$$\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}} = \frac{xy(x+y)}{x^2+y^2}\ \ \forall\ \ x, y \in \mathbf{F}.$$

अब

$$\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}}=\frac{\frac{y+x}{xy}}{\frac{y^2+x^2}{x^2y^2}}$$

$$=\frac{y+x}{xy}\cdot\frac{x^2y^2}{y^2+x^2}$$

$$=\frac{(x+y)x^2y^2}{(x^2+y^2)xy}$$

$$=\frac{(x+y)xy}{x^2+y^2}$$

$$=\frac{xy(x+y)}{x^2+y^2}$$

3. सरल कीजिए।

$$\left(x+\frac{1}{y}\right)\div\left(y+\frac{1}{x}\right) \text{ जहाँ } x, y \in \mathbf{F}.$$

अब

$$\left(x+\frac{1}{y}\right)\div\left(y+\frac{1}{x}\right)=\left(\frac{x}{1}+\frac{1}{y}\right)\div\left(\frac{y}{1}+\frac{1}{x}\right)$$

$$=\frac{xy+1}{y}\div\frac{yx+1}{x}$$

$$=\frac{xy+1}{y}\times\frac{x}{yx+1}$$

$$=\frac{x(xy+1)}{y(xy+1)}=\frac{x}{y}.$$

4. सिद्ध कीजिए कि

$$(x+3)+\frac{4x+3}{x^2+1}=\frac{x^3+3x^2+5x+6}{x^2+1} \qquad \forall\ x\in\mathbf{F}.$$

अब

$$(x+3) + \frac{4x+3}{x^2+1} = \frac{x+3}{1} + \frac{4x+3}{x^2+1}$$

$$= \frac{(x+3)(x^2+1)+4x+3}{x^2+1}$$

$$= \frac{\{x(x^2+1)+3(x^2+1)\}+4x+3}{x^2+1}$$

$$= \frac{\{(x^3+x)+(3x^2+3)\}+4x+3}{x^2+1}$$

$$= \frac{x^3+3x^2+5x+6}{x^2+1}$$

5. सरल कीजिए।

$\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{4x}+\frac{5}{x^2}\right)$ जहाँ $x \in \mathbf{F}$.

अब

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{4x}+\frac{5}{x^2}\right) = \left(\frac{x}{1}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3x+20}{4x^2}\right)$$

$$= \frac{2x+1}{2} \cdot \frac{3x+20}{4x^2}$$

$$= \frac{(2x+1)(3x+20)}{8x^2}$$

$$= \frac{(2x+1)\,3x+(2x+1)20}{8x^2}$$

$$= \frac{(6x^2+3x)+(40x+20)}{8x^2}$$

$$= \frac{6x^2+(3+40)x+20}{8x^2}$$

$$= \frac{6x^2+43x+20}{8x^2}$$

प्रश्नावली

1. यदि $x, y, z \ldots\ldots$ समुच्चय **F** के अंग हों तो निम्नलिखित को योगफलों के रूप में लिखिए।

(i) $\left(\frac{1}{2}x+3\right)\left(x+5\right)$ (ii) $\left(\frac{3}{4}x+\frac{5}{7}y\right)\left(\frac{2}{3}x+\frac{7}{10}y\right)$

(iii) $\left(\cdot01x+\cdot37z\right)\left(\cdot5x+\cdot15y\right)$ (iv) $\left(z+\cdot5\right)\left(\frac{1}{3}z+\frac{1}{4}\right)$

(v) $(\cdot5x+3y)\left(1\cdot3y+\frac{2}{3}z\right)$ (vi) $\left(x+\frac{7}{3}\right)\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{13}\right)$

(vi) $\frac{1}{xyz}\left(x^2yz+\cdot5xy^2z+\frac{7}{2}xyz^2\right)$

(viii) $\left(\cdot3x+\frac{1}{7}y\right)\left(x^2+1\cdot5y^2\right)$

(ix) $xyz^2\left(\frac{2}{3}x+\frac{5}{4}y+\frac{7}{3}\cdot\frac{1}{z}\right)$

(x) $x^2y^2z^2\left(\frac{2}{9x}+\frac{14}{5y}+\frac{12}{3z}\right)$

2. सिद्ध कीजिए कि किन्हीं भी भिन्नों x, y, z के लिए निम्नलिखित कथन सत्य हैं।

(i) $\frac{x}{3}+\frac{y}{7}=\frac{7x+3y}{21}$ (ii) $\frac{5}{xy+y^2}+\frac{2}{x^2+xy}=\frac{5x+2y}{xy(x+y)}$

(iii) $\frac{x^2y}{xy+y^2+yz}+\frac{y^2x}{x^2+xy+xz}+\frac{z^3}{z^2+zx+zy}=\frac{x^2+y^2+z^2}{x+y+z}$

(iv) $\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}{\frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}}=\frac{x^2y^2(x+y)}{x^3+y^3}$ (v) $\frac{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}}{\frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}}=\frac{xy(x^2+y^2)}{x^3+y^3}$

(vi) $\frac{1}{x+5}+\frac{2}{3(x+5)^2}=\frac{3x+17}{3(x+5)^2}$

(vii) $\frac{a}{x+b}+\frac{c}{x+d}=\frac{(a+c)\,x+ad+bc}{(x+b)\,(x+d)}$

(viii) $\frac{3}{x+1}+\frac{2x+1}{x^2+1}=\frac{5x^2+3x+4}{(x+1)(x^2+1)}$

(ix) $\frac{2x+1}{x^2+1}+\frac{3x+5}{x^2+2}=\frac{5x^3+6x^2+7x+7}{(x^2+1)\,(x^2+2)}$

(x) $\frac{2}{3x+4}+\frac{3}{2x+5}=\frac{13x+22}{(3x+4)(2x+5)}$.

3. $x, y, z, \cdots\cdots$ समुच्चय **F** के अंग होने पर निम्नलिखित को सरल कीजिए।

(i) $1\div\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$ (ii) $\left(2x+\frac{3}{y^2}\right)\div\left(3x+\frac{2}{y^2}\right)$

(iii) $\left(\frac{2}{x}+\frac{3}{y}\right)\div\left(\frac{5}{x}+\frac{2}{y}\right)$ (iv) $\left(x+\frac{5}{y}\right)\div\frac{10}{xy}$

(v) $\left(1+\frac{1}{x}\right)\div\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$ (vi) $\frac{6z+12}{5}\times\frac{15y}{7z+14}$

(vii) $\frac{4x^2+6}{8x+6}$ (viii) $\frac{2y}{3}+\frac{1}{3y}$

(ix) $\frac{y}{2}+\frac{1}{2y}$ (x) $\frac{2y}{7z^2}\times\frac{3yz}{8}\times\frac{yz}{9a^2}$

(xi) $\frac{x}{x^2+2x}+\frac{3}{x}$ (xii) $\frac{xyz+\frac{1}{2}x^2y}{\frac{3}{4}x+\frac{3}{2}z}$

(xiii) $\frac{\frac{7}{11}x+\frac{13}{8}y}{\frac{8}{13}x+\frac{11}{7}y}$ (xiv) $\frac{x^2+y^2}{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}}$

(xv) $\frac{3x^2+5y^2}{\cdot5\,x+\frac{3}{4}y}\times\frac{\frac{\cdot5}{y}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{x}}{\frac{1}{5}x^2+\frac{1}{3}y^2}$

(*xvi*) $$\frac{\frac{3}{7}x^2+\frac{2}{3}y^2}{\cdot 75x+\frac{3}{11}y} \times \frac{\frac{8\cdot 25}{y}+\frac{3}{x}}{\frac{7}{13}x^3+\frac{19}{12}y^3} \times \frac{\frac{12}{13}x^3+\frac{19}{7}y^3}{9x^2+14y^2}.$$

4. सिद्ध कीजिए कि $3x+4>5x+2 \;\forall\; x<1;\; x\in \mathbf{F}$.

5. सिद्ध कीजिए कि $x_2>x_1 \Rightarrow x_2^2>x_1^2;\; x_1, x_2 \in \mathbf{F}$.

6. सिद्ध कीजिए कि $x_2<x_1 \Rightarrow \frac{1}{x_2}>\frac{1}{x_1};\; x_1, x_2 \in \mathbf{F}$.

7. सिद्ध कीजिए कि $\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x+4}=\frac{1}{(x+3)(x+4)} \;\forall\; x\in \mathbf{F}$.

8. सिद्ध कीजिए कि $\frac{1}{2x^2+5}>\frac{1}{2x^2+7} \;\forall\; x\in \mathbf{F}$.

साथ ही सिद्ध कीजिए कि $\frac{1}{2x^2+7}-\frac{1}{2x^2+7}=\frac{2}{(2x^2+5)\,(2x^2+7)} \;\forall\, x\in \mathbf{F}$.

30. खुले कथन

उदाहरण

1. $$3x+5=7;\; x\in \mathbf{F}.$$

का सत्य समुच्चय निकालिए।

हल—हम यह देखने का प्रयत्न करेंगे कि x वाला पद समता के एक पक्ष में और संख्या वाला पद इसके दूसरे पक्ष में आए।

अब $3x+5=7$

या तुल्य रूप में $3x+5=2+5$.

दोनों पक्षों से 5 काटने पर $3x=2$

प्राप्त होता है।

दोनों पक्षों को $\frac{1}{3}$ से गुणा करने पर

$$\frac{1}{3}\cdot(3x)=\frac{1}{3}\cdot 2$$

अथवा तुल्य रूप में

$$x=\frac{2}{3}$$

प्राप्त होता है।

इस विधि का प्रदर्शन निम्नलिखित रूप में भी किया जा सकता है।

$$3x+5=7$$
$$\Leftrightarrow 3x+5=2+5$$
$$\Leftrightarrow \quad 3x=2$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}\ (3x)=\frac{1}{3}\ .\ 2$$
$$x=\frac{2}{3}\ .$$

अपेक्षित सत्य समुच्चय

$$\left\{\frac{2}{3}\right\}$$

है और इसमें केवल एक ही अंग है।

टिप्पणी यह ध्यान देने योग्य है कि हमने एक दूसरे के तुल्य कथनों की शृंखला प्राप्त करने का प्रयत्न किया है। तुल्य कथनों की इस शृंखला के अन्तिम अंग का सत्य समुच्चय प्रत्यक्ष ही है।

2. $5x+4=3x+2;\ x\in \mathbf{F}.$

का सत्य समुच्चय निकालिए।

हल—हम तुल्य कथनों की निम्नलिखित शृंखला प्राप्त करते हैं।

$$5x+4=3x+2;$$
$$\Leftrightarrow 3x+(2x+4)=3x+2;$$
$$2x+4=2.$$

अब

$$4>2$$
$$\Rightarrow 2x+4>2\ \forall\ x\in \mathbf{F}.$$

इस प्रकार **F** का कोई ऐसा अंग x नहीं है जिसके लिए

$$2x+4=2.$$

अतः भिन्नों के समुच्य के प्रसंग में दिए हुए खुले कथन का सत्य समुच्चय रिक्त है।

3. असमता

$$3x+2<5,\ x\in \mathbf{F}$$

का सत्य समुच्चय निकालिए।

हल— $3x+2<5$

$$\Leftrightarrow 3x+2<3+2$$
$$\Leftrightarrow \quad 3x<3$$
$$\Leftrightarrow \quad x<1$$

विशेषत: भिन्न

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{4}{5}$$

दिए हुए खुले कथन का समाधान करते हैं।

प्रश्नावली

1. यदि $x \in F$ तो निम्नलिखित को x के लिए हल कीजिए।

(i) $x+\frac{11}{7}=\frac{13}{7}$ (ii) $x+\frac{2}{3}=\frac{8}{5}$

(iii) $2x=3$ (iv) $\frac{5}{7}x=\frac{19}{17}$

(v) $4=9x$ (vi) $x-\frac{6}{11}=\frac{5}{2}$

(vii) $\frac{15}{4}-x=\frac{1}{3}$ (viii) $2x+3=4$

(ix) $6+7x=9$ (x) $2x+7=3x+2$

(xi) $17x-2=1$ (xii) $7-5x=3$

(xiii) $5x+2=5+3x$ (xiv) $12-3x=x+3$

(xv) $7x-2=2-3x$.

2. यदि $x \in F$ तो निम्नलिखित समीकरणों के सत्य समुच्चय निकालिए।

(i) $13x+4=5x+12$ (ii) $5-11x=x+5$

(iii) $25-x=4+11x$ (iv) $4-3x=x+11$

(v) $4x+3=1$ (vi) $10x+3=23$

(vii) $19-5x=2x+5$ (viii) $23-2x=3x+25$

(ix) $3x+4=4-7x$ (x) $25+-7x=2x+15$

(xi) $4x+6=2x+25$.

3. यदि $x \in F$ तो निम्नलिखित खुले कथनों के सत्य समुच्चय निकालिए।

(i) $x\div 3=\frac{2}{7}$ (ii) $x\div\frac{3}{8}=\frac{13}{11}$

(*iii*) $3 \div x = 6$ (*iv*) $25 \div (2x) = 4$

(*v*) $(x \div 5) + 2 = 7$ (*vi*) $16 \div x = 4$

(*vii*) $(x \div 3) - 2 = 2x - 7$ (*viii*) $2 - (3x \div 4) = x + \frac{5}{2}$.

4. यदि $x \in \mathbf{F}$ तो निम्नलिखित खुले कथनों के सत्य समुच्चय निकालिए।

(*i*) $3x - 2 < 4$ (*ii*) $2 - 5x > \frac{1}{2}$

(*iii*) $2x \div 3 > 5$ (*iv*) $2x \div 3 < 4$

(*v*) $\frac{3}{4}x + \frac{1}{2} > \frac{9}{16}$ (*iv*) $13x + \frac{7}{2} < \frac{47}{15}$

(*vii*) $2x + 3 \leqslant 6$ (*viii*) $\frac{5}{3}x + \frac{2}{7} \leqslant \frac{1}{10}$

(*ix*) $\frac{12}{13}x + \frac{1}{2} < \frac{3}{4}$ (*x*) $4x + 2 \geqslant 3 + 2x$

(*xi*) $7 + 3x \geqslant 5x + 4$ (*xii*) $7 - 3x \geqslant 5x + 4$

(*xiii*) $x + 11 \geqslant 3x + 10$ (*xiv*) $4x + 15 < 3x + 5$

(*xv*) $3 \div x \leqslant 5$.

निर्मेय

ऐसी संख्या निकालिए जिसके वर्ग का दो-तिहाई उस संख्या के 7 गुणे के बराबर हो।

हल—मान लीजिए कि यह संख्या x है।

तब इसके वर्ग का दो-तिहाई $= \frac{2}{3}x^2$.

साथ ही इस संख्या का 7 गुणा $7x$ है।

$$\therefore \quad \frac{2}{3}x^2 = 7x$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{2}{3}x = 7$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{3}{2} \times \left(\frac{2}{3} \times x\right) = \frac{3}{2} \times 7$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{21}{2}$$

अतः अपेक्षित संख्या $\frac{21}{2}$ है ।

2. राम और कृष्ण किसी काम को क्रमशः 6 और 12 दिन में कर सकते हैं । यदि दोनों एक साथ काम करें तो कार्य कितने दिनों में समाप्त कर सकेंगे ?

हल—मान लीजिए कि राम और कृष्ण दोनों मिलकर काम को x दिनों में समाप्त करते हैं ।

अब राम एक दिन में काम का $\frac{1}{6}$ समाप्त कर सकता है ।

इसलिए वह x दिनों में काम का $\frac{1}{6}\times x$ कर सकेगा ।

पुनः कृष्ण एक दिन में काम का $\frac{1}{12}$ समाप्त कर सकता है । इसलिए वह x दिनों में काम का $\frac{1}{12}\times x$ कर सकेगा ।

क्योंकि हमने यह कल्पना की है कि दोनों मिलकर काम को x दिनों में समाप्त करते हैं इसलिए

$$\frac{1}{6}x+\frac{1}{12}x=1$$

$$\Leftrightarrow \quad 12\left(\frac{1}{6}x+\frac{1}{12}x\right)=12$$

$$\Leftrightarrow \quad 2x+x=12$$

$$\Leftrightarrow \quad 3x=12$$

$$\Leftrightarrow \quad x=4.$$

अतः वे दोनों मिलकर काम को 4 दिन में समाप्त कर सकते हैं ।

3. कोई व्यक्ति 4000 रुपये का कुछ अंश $6\frac{1}{4}\%$ ब्याज पर और शेष अंश $6\frac{1}{2}\%$ ब्याज पर लगाता है । यदि उसकी कुल आय 255·675 रु० हो तो उसके दोनों विनियोग निकालिए ।

हल—मान लीजिए कि पहला विनियोग x रुपए है । तब इस विनियोग से प्राप्त

आय $=\frac{x}{100}\times 6\frac{1}{4}$ रुपए ।

साथ ही दूसरा विनियोग $(4000-x)$ रु० होगा ।

दूसरे विनियोग से आय$=\frac{4000-x}{100}\times 6\frac{1}{2}$ रुपए। किन्तु कुल आय 255·675 रु० की हुई है।

$$\therefore \quad \frac{x}{100}\times 6\tfrac{1}{4}+\frac{4000-x}{100}\times 6\tfrac{1}{2}=255{\cdot}675$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{25x}{400}+\frac{13\ (4000-x)}{200}=255{\cdot}675$$

$$\Leftrightarrow \quad 400\left[\frac{25x}{400}+\frac{13(400-x)}{200}\right]=400\times 255{\cdot}675$$

$$\Leftrightarrow \quad 25x+104000-26x=102270$$

$$\Leftrightarrow \quad 25x+104000-26x+26x=102270+26x$$

$$\Leftrightarrow \quad 1730=x.$$

उसका पहला विनियोग 1730 रु० और दूसरा विनियोग
(4000−1730) रु० अर्थात् 2270 रु० है।

प्रश्नावली

1. वह संख्या कौन-सी है जिसे उससे 10 न्यून संख्या से भाग देने पर भागफल 6 आता है ?

2. एक संख्या किसी दूसरी छोटी संख्या के तीन गुने से 10 न्यून है। बड़ी संख्या को 8 से भाग देने पर वही भागफल आता है जो छोटी को 3 से भाग देने पर। संख्याएँ निकालिए।

3. किसी संख्या और 21 के योगफल का दो-तिहाई 30 के बराबर है। संख्या निकालिए।

4. एक संख्या दूसरी के दुगुने से 5 अधिक है। यदि दोनों का अनुपात 15 : 7 हो तो संख्याएँ निकालिए।

5. एक वायुयान की पूँछ का माप इसकी कुल लंबाई का $\frac{1}{7}$ है और उसके चालक-कक्ष का माप इसकी कुल लंबाई का $\frac{1}{2}$ है। वायुयान के शेष भाग का माप कुल लंबाई का कितना भाग है।

6. एक परिवार की कुल मासिक आय 500 रु० है। इसका एक-चौथाई किराए में, एक-दशमांश कपड़ों पर और तीन-अष्टमांश खाने पर व्यय होता है। अन्य कार्यों के लिए शेष कितना बचता है ?

7. राम दिन के $\frac{1}{3}$ भाग में सोता है, $\frac{1}{9}$ भाग में खाता है और $\frac{1}{4}$ भाग में पढ़ता है। दिन के बाकी समय का घंटों में हिसाब लगाइए।

8. कृष्ण ने कार द्वारा तीन दिन की यात्रा की योजना बनाई और प्रत्येक दिन कुल दूरी का $\frac{1}{3}$ भाग पार करने का निश्चय किया। किन्तु दूसरे दिन इंजन खराब हो जाने के कारण वह कुल दूरी का $\frac{1}{5}$ भाग ही पार कर सका। निश्चित स्थान पर पहुँचने के लिए उसे तीसरे दिन दूरी का कितना भाग पार करना होगा।

9. पैट और माइक नामक दो अंतरिक्ष यात्री विभिन्न अंतरिक्ष यानों में पृथ्वी के चक्कर लगा रहे थे। दोनों एक ही कक्षा तल और एक ही दिशा में चक्कर लगा रहे थे। पैट एक चक्कर 3 घंटे में और माइक एक चक्कर $7\frac{1}{2}$ घंटे में पूरा करता है। दिल्ली समय के अनुसार दोपहर 12 बजे माइक पैट को ठीक अपने नीचे देखता है। पैट और माइक एक दूसरे के ऊपर नीचे पुनः किस समय होंगे ?

10. एक रंगलेपक उतने ही समय में दूसरे की अपेक्षा $\frac{5}{7}$ गुणा काम करता है। यदि दोनों मिलकर एक घर की लिपाई 6 दिन में करते हों तो मन्दलेपक उसकी लिपाई कितने समय में कर पाएगा ?

11. तीन नलियाँ एक जलाशय को क्रमशः 3, 4 और 5 घंटों में भर सकती हैं। तीनों एक साथ जलाशय को कितने समय में भरेंगी ?

12. एक राज एक दीवार को 12 दिन में बना सकता है। किन्तु एक सहायक के मिल जाने पर कार्य 8 दिन में समाप्त हो जाता है। अकेले सहायक को दीवार बनाने में कितना समय लगेगा ?

13. प्रयोगशाला में प्रयुक्त 10 लिटर अल्कोहल 80% शुद्ध है (अर्थात 80% अल्कोहल, 20% जल)। उसमें कितने लिटर जल मिलाया जाए कि परिणामी मिश्रण में 30% अल्कोहल हो ?

14. मोहन 10,000 रु० लगाता है। इसके कुछ अंश में उसे 4% हानि होती है और शेष पर 5% लाभ होता है। यदि पूरे पर उसे न लाभ न हानि हो तो उसके दोनों विनियोग निकालिए।

15. 790 रु० को क, ख और ग में इस प्रकार बाँटिए कि ख को क से 20% और ग से 25% अधिक मिले।

सिंहावलोकन प्रश्नावली

1. यदि

$$A=\left\{\frac{3}{5},\ \frac{7}{9},\ 2,\ \frac{23}{5},\ 3,\ \frac{11}{2},\ \frac{22}{26}\right\},$$

$$B=\left\{\frac{11}{13},\ 3,\ \frac{17}{4},\ 5,\ \frac{21}{8},\ \frac{57}{15},\ \frac{6}{10}\right\},$$

तो निम्नलिखित समुच्चयों के अधिकतम और न्यूनतम अंग निकालिए।

A, B, $A \cup B$ और $A \cap B$.

2. दिया हुआ है कि

$$L = \{x : 1 < x < 2 \text{ और } x \in \mathbf{F}\}$$
$$M = \{x : 1 \leqslant x < 2 \text{ और } x \in \mathbf{F}\}$$
$$N = \{x : 1 < x \geqslant 2 \text{ और } x \in \mathbf{F}\}$$
$$P = \{x : 1 \leqslant x \leqslant 2 \text{ और } x \in \mathbf{F}\}$$

यदि संभव हो तो निम्नलिखित समुच्चयों के अधिकतम और न्यूनतम अंग निकालिए।

L, M, N, P

$L \cup M, L \cup N, M \cup N.$

3. सिद्ध कीजिए कि

$$x > y \Rightarrow x^3 > y^3 \qquad x, y \in \mathbf{F}.$$

4. सिद्ध कीजिए कि

$$x^2 + y^2 > xy \qquad x, y \in \mathbf{F}.$$

5. सिद्ध कीजिए कि

$$x > y \Rightarrow \frac{x}{y} > \frac{x+1}{y+1} \qquad x, y \in \mathbf{F}.$$

6. सिद्ध कीजिए कि

$$x > y \Rightarrow x^3 + 3xy^2 > 3x^2y + y^3 \qquad x, y \in \mathbf{F}.$$

7. यदि

$$x > y;\ x, y \in \mathbf{F},$$

तो सिद्ध कीजिए कि

(i) $\dfrac{1}{y^2} > \dfrac{1}{x^2}$

(ii) $\dfrac{1}{2y+5} > \dfrac{1}{2x+5}$

(iii) $\dfrac{1}{7y^3} > \dfrac{1}{7x^3}$.

8. यदि x, y, z, a, b, c समुच्चय $\mathbf{F}$ के अंग हों तो निम्नलिखित को योगफल के रूप में लिखिए।

(i) $(ax^2 + by^2)(ay^2 + bz^2)$ (ii) $(ax + by + cz)(x + y + z)$

(iii) $\left(\cdot 5a + \frac{1}{3}b\right)(x + 2y + 3z)$ (iv) $(1\cdot 7x + 2\cdot 3y)\left(a + \frac{2}{5}z\right)$

(v) $xy^3z^2\left(\frac{3}{z} + \frac{2}{y^2} + \frac{1}{7}x\right)$

9. यदि x, y, z, a, b, c समुच्चय **F** के अंग हों तो निम्नलिखित को सरल कीजिए ।

(i) $\dfrac{\frac{7}{3}\cdot\frac{x}{y}+5}{x+\frac{15}{7}y}$ (ii) $\dfrac{x+\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x^2}}$

(iii) $\left(\frac{5}{4}x+\frac{2}{3}y\right)\div\left(\frac{3}{4}x+\frac{2}{5}y\right)$

(v) $\dfrac{3a+4b+\frac{1}{2}c}{a^2+\frac{4}{3}ab+\frac{1}{6}ac}$ (v) $\dfrac{1+\frac{z}{xy}}{\frac{xy}{z}+1}$

(vi) $\dfrac{ax+by}{cz^2+a^2}\times\dfrac{a+cz}{\frac{x}{b}+\frac{y}{a}}$ (vii) $\dfrac{\cdot 4x+\cdot 15y}{8x+3y}$

(viii) $\dfrac{x+\frac{1}{x}}{y+\frac{1}{y}}\div\dfrac{1+\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{y^2}+1}$ (ix) $\dfrac{x^2+\frac{1}{x}}{z+\frac{1}{z^2}}\times\dfrac{z^2+\frac{1}{z}}{x+\frac{1}{x^2}}$

(x) $\dfrac{ax+bx}{c\,(y+z)}\times\dfrac{a(z+x)}{bz+az}\times\dfrac{\frac{2}{3}\,(y+z)}{\frac{2}{5}z+\cdot 4x}$

10. यदि $x\subset$ **F** तो निम्नलिखित खुले कथनों के सत्य समुच्चय निकालिए ।

(i) $27-3x=2x+21$ (ii) $22\div(x+3)=5$

(iii) $(7\div x)+5=\frac{21}{4}$ (ii) $\frac{7}{5}+\frac{2}{3}x=\frac{15}{16}x+\frac{11}{13}$

(v) $\{(x-3)\div 2\}+3=\frac{2x+7}{4}$

(vi) $\frac{2}{3}x+\frac{11}{4}<\frac{21}{5}$ (vii) $\frac{3}{x}+5\geqslant 6\cdot 5$

(viii) $\frac{x}{2}+\frac{3}{8}\leqslant\frac{27}{72}$ (ix) $(x\div 5)-3\geqslant\frac{1}{2}$

(x) $(27\div x)+3\geqslant\frac{11}{7}$

11. किसी रसायनज्ञ के पास एक घोल 50% शुद्ध तेजाब वाला और दूसरा घोल 80% शुद्ध तेजाब वाला है। प्रत्येक घोल के कितने-कितने ग्राम मिलाने से 72% शुद्ध तेजाब वाला 600 ग्राम घोल बन जाएगा ?

12. एक घोल में 40 ग्राम चीनी और 200 ग्राम जल है। 50% चीनी वाला घोल बनाने के लिए कितनी चीनी मिलानी पड़ेगी।

13. एक वातानुकूलक 12 मिनट में तापमान को 10 तापाँश नीचे लाता है। किन्तु यदि एक और वातानुकूलक चला दिया जाए तो दोनों मिलकर 4 मिनट में 10 तापाँश नीचे ले आते हैं। यही परिवर्तन करने में दूसरे वातानुकूलक को कितना समय लगेगा।

14. एक ही कार्य को 8 पुरुष 3 घंटे में अथवा 15 लड़के 5 घंटे में कर सकते हैं। तीन पुरुष और 25 लड़के मिलकर इसी कार्य को कितने समय में समाप्त करेंगे ?

15. एक व्यक्ति स्थिर जल में 4 किलोमीटर प्रति घण्टा तैर सकता है। पानी के बहाव के प्रतिकूल 4 किलोमीटर तैरने में उसे उतना ही समय लगता है जितना कि पानी के बहाव के अनुकूल 12 किलोमीटर तैरने में। नदी में पानी के बहाव की चाल क्या है ?

16. एक व्यक्ति ने कुछ धन राशि 5% ब्याज दर पर और उससे 800 रु० कम $3\frac{1}{2}$% ब्याज दर पर लगाई। दोनों विनियोगों से मिलाकर उसे कुल 210 रु० प्राप्त हुए। उसके दोनों विनियोग निकालिए।

17. एक व्यक्ति कुछ धनराशि 4% वार्षिक दर से और उससे 500 रु० अधिक 5% वार्षिक दर से लगाता है। एक वर्ष में दूसरी का ब्याज पहली के ब्याज से 33 रु० अधिक है। उसके विनियोग निकालिए।

18. एक व्यक्ति अपनी संपत्ति का 60% अपनी पत्नी के लिए और शेष अपने पुत्र के लिए छोड़ जाता है। पत्नी अपने भाग को 5·5% वार्षिक दर से लगाती है और पुत्र अपने भाग को 4·5% वार्षिक दर से लगाता है। यदि पुत्र की वार्षिक आय 54% रु० हो तो पत्नी की वार्षिक आय निकालिए।

19. एक दुकानदार किसी वस्तु के अंकित मूल्य में 10% छूट देने के पश्चात भी 10% लाभ प्राप्त करता है यदि वस्तु का अंकित मूल्य 77 रु० हो तो वस्तु का क्रय-मूल्य निकालिए।

20. एक व्यक्ति 1000 रु० में दो घोड़े खरीदता है। इसमें से एक को 30% लाभ पर और दूसरे को 20% हानि पर बेचता है। सौदे में उसे 100 रु० का लाभ होता है। दोनों घोड़ों के क्रय-मूल्य निकालिए।

4

परिमेय संख्याएँ

31. भूमिका

यह देखा जा चुका है कि भिन्नों का समुच्चय $\mathbf{F}$ योग और गुणन-संयोजनों के लिए ही नहीं अपितु गुणन-संयोजन के प्रतिलोम विभाजन संयोजन के लिए भी बंद है। इसका अर्थ यह हुआ कि

$$x \in \mathbf{F}, y \in \mathbf{F} \Rightarrow \begin{cases} x + y \in \mathbf{F} \\ x \times y \in \mathbf{F} \\ x \div y \in \mathbf{F}. \end{cases}$$

योग संयोजन के प्रतिलोम व्यवकलन की समस्या अब भी बनी रहती है, क्योंकि समुच्चय $\mathbf{F}$ के x, y अंग होने पर, प्रतीक

$$x - y$$

भिन्नों के समुच्चय के प्रसंग में तब और तभी सार्थक होता है जब

$$x > y.$$

उदाहरण के लिए, भिन्नों के समुच्चल के प्रसंग में व्यंजक

$$\frac{7}{8} - \frac{1}{5},$$

तो सार्थक है किन्तु व्यंजक

$$\frac{1}{5} - \frac{7}{8},$$

सार्थक नहीं है क्योंकि

$$\frac{7}{8} > \frac{1}{5}.$$

व्यवकलन के इस प्रतिबंध को हटाने के लिए हम अब नई संख्याओं का आविष्कार करेंगे। ऐसी संख्याओं का समुच्चय परिमेय संख्याओं का समुच्चय कहलाता है और अपेक्षतया समृद्ध होता है। यह

नया समुच्चय भिन्नों के समुच्चय का एक अतिसमुच्चय है और इसमें इसके अंगों के किसी युग्म के लिए व्यवकलन सार्थक होता है। इस प्रकार इस अध्याय के निम्नलिखित उद्देश्य है।

(1) परिमेय संख्याओं का समुच्चय निर्धारित करना,

(2) परिमेय संख्याओं के समुच्चय में योग और गुणन संयोजनों की तथा 'अधिक है ...से' संबंध की परिभाषा देना,

(3) उपर्युक्त (2) में संकेतित दो संयोजनों और संबंध के नियमों का विकास करना, और

(4) व्यवकलन और विभाजन के संयोजनों का विचार करना।

इन उद्देश्यों के लिए यहाँ

सचिह्न संख्याओं

की धारणा का परिचय देना उपयोगी सिद्ध होगा।

32. सचिह्न संख्याओं की धारणा

हमारे दैनिक जीवन में वस्तुओं के ऐसे युग्मों की चर्चा के अवसर आते हैं, जिनमें युग्म के दो अंगों में से एक को एक प्रकार से दूसरे के विपरीत समझा जा सकता है, जैसे, हम निम्नलिखित की चर्चा करते हैं :

(*i*) आय और व्यय,

(*ii*) लाभ और हानि,

(*iii*) उत्थान और पतन,

(*iv*) पूर्व की ओर गति और पश्चिम की ओर गति।

मान लीजिए कि किसी को 200 रु० का लाभ होता है अथवा 200 रु० की हानि होती है।

यदि इस 200 रु० के लाभ को

+200 रु०

के लाभ के रूप में सूचित करना मान लें,

तो 200 रू० की हानि को

—200 रु०

के लाभ के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

पुन: यदि हम 40 किलोमीटर प्रति घंटा की चाल से पूर्व दिशा की ओर जाने वाली रेलगाड़ी के वेग को

+40 किलो मीटर प्रति घंटा

के वेग में रूप में सूचित करें

तो 40 किलोमीटर प्रति घंटा की चाल से पश्चिम दिशा की ओर जाने वाली रेलगाड़ी के वेग को

—40 कि० मी० प्रति घंटा

के वेग के रूप में व्यक्त करेंगे।

यह कहना उचित होगा कि नामपद्धति को बदलने और 200 रु० की हानि को +200 रू० की हानि के रूप में तथा 200 रु० के लाभ को —200 रु० की हानि के रूप में व्यक्त करने में कोई बाधा नहीं होती।

यह ध्यान देना महत्त्वपूर्ण है कि इस प्रसंग में हमें अनिवार्यतः तीन प्रतीकों अर्थात्

$$200, \ +200, \ -200$$

को जानना चाहिए। ये प्रतीक क्रमशः निम्नलिखित के अनुरूप हैं :

(*i*) 200 रु० की राशि ;
(*ii*) +200 रु० का लाभ ;
(*iii*) −200 रु० का लाभ ;

हम

$$+200, \ -200$$

को दो सचिह्न संख्याएँ कहेंगे और इनका क्रमशः धनात्मक और ऋणात्मक संख्याओं के रूप में वर्णन करेंगे।

संख्या 200 को दो सचिह्न संख्याओं

$$+200, \ -200$$

का निरपेक्ष मान कहा जाएगा।

यह स्मरणीय है कि 200 के उपवर्ग-रूप चिह्नों +, — को सचिह्न संख्याओं के अभिन्न अंग समझना चाहिए। यह भी स्मरणीय है कि इन प्रतीकों का उपयोग यहाँ पहले की अपेक्षा भिन्न उद्देश्य से किया जा रहा है। पहले हमने इन चिह्नों का उपयोग योग और व्यवकलन संख्याओं को सूचित करने के लिए किया था। इस प्रसंग में ये चिह्न दो संख्याओं के बीच में रखे गए थे जैसे

$$7+5, \ 7-5$$

परंतु यहाँ +200 और —200 के प्रसंग की भाँति इन चिह्नों को अकेली संख्याओं के उपसर्ग के रूप में नहीं रखा था।

अब अगले भाग में परिमेय संख्याओं के समुच्चय की परिभाषा देंगे।

33. परिमेय संख्याओं का समुच्चय

प्रत्येक

$$\frac{a}{b} \in \mathbf{F}$$

के साथ हम दो सचिह्न संख्याओं

$$+\frac{a}{b}, -\frac{a}{b}$$

का संबंध जोड़ते हैं और इन्हें **परिमेय संख्याएँ** कहते हैं।

इनके अतिरिक्त हम प्रतीक

'0'

को भी प्रस्तुत करते हैं, जिसे संख्या शून्य कहते हैं।

हम

$$+\frac{a}{b}$$

को धनात्मक परिमेय संख्या और

$$-\frac{a}{b}$$

को ऋणात्मक परिमेय संख्या कहेंगे।

संख्या, 9 , न धनात्मक होगी, न ऋणात्मक। इस प्रकार कोई परिमेय संख्या धनात्मक, ऋणात्मक अथवा शून्य हो सकती है।

इसके साथ ही, हम

$$+0, \ -0$$

में से प्रत्येक को

$$0$$

से अभिन्न मानेंगे।

इस प्रकार, निम्नलिखित संख्याएँ, परिमेय संख्याओं में से कुछ हैं :

$$+3, -7, -\frac{3}{8}, +\frac{11}{12}, +\frac{23}{12}, -\frac{11}{6}, -\frac{2}{3}.$$

इनमें से

$$+3, +\frac{11}{12}, +\frac{23}{12}$$

धनात्मक परिमेय संख्याएँ और

$$-7, -\frac{3}{8}, -\frac{11}{6}, -\frac{2}{3}$$

ऋणात्मक परिमेय संख्याएँ हैं।

परिमेय संख्याओं के समुच्चय को प्रतीक

$$\mathbf{Q}$$

द्वारा सूचित किया जाएगा, जो *Quotient* (कोशेंट—भागफल) शब्द का पहला वर्ण है। वर्ण **Q** लिखने का आधार यह तथ्य है कि शून्य से विभिन्न प्रत्येक परिमेय संख्या दो धन-संख्याओं के भागफल के उपसर्ग रूप में चिह्न '+' अथवा चिह्न '−' लगाकर प्राप्त किया जा सकता है।

यहाँ यह भी प्रश्न उठ सकता है कि परिमेय (*rational*—रैशनल) संख्याओं के समुच्चय को **R** द्वारा सूचित क्यों नहीं किया गया। इस विषय में यह उल्लेखनीय है कि वर्ण **R** वास्तविक (*real*—रीअल) संख्याओं के समुच्चय को सूचित करने के लिए सुरक्षित रखा गया है। वास्तविक संख्याओं का यह समुच्चय परिमेय संख्याओं के समुच्चय का ही आगे विस्तार है।

अतः

$$\mathbf{Q} = \{+x, -x, 0 : x \in \mathbf{F}\}.$$

Q का एक महत्त्वपूर्ण उपसमुच्चय होता है जिसे हम पूर्ण संख्याओं का समुच्चय कहते हैं इसे हम **I** द्वारा सूचित करेंगे।

इस प्रकार

$$\mathbf{I} = \{+x, -x, 0 : x \in \mathbf{N}\}.$$

I का वर्णन निम्नलिखित रूप में भी किया जाता है :

$$\mathbf{I} = \{0, +1, -1, +2, -2, +3, -3, \ldots\}.$$

निश्चय ही प्रत्येक पूर्ण संख्या परिमेय संख्या भी होती है और इसलिए

$$\mathbf{I} \subset \mathbf{Q}$$

किन्तु प्रत्येक परिमेय संख्या पूर्ण संख्या नहीं होती। उदाहरणार्थ $+\frac{3}{5}$, $-\frac{7}{8}$ परिमेय संख्याएँ तो हैं किन्तु पूर्ण संख्याएँ नहीं।

परिमेय संख्या का निरपेक्षमान

दोनों परिमेय संख्याओं

$$+200, \quad -200$$

में से प्रत्येक के प्रसंग में हम संख्या 200 को उसका संख्यात्मक मान अथवा निरपेक्ष मान कहेंगे। साथ ही हम +200, −200 को दो उदग्र दंडों के बीच रखकर

$$|+200| = |-200| = 200$$

लिखते हैं।

व्यापक रूप में यदि x कोई अंग हो $\mathbf{F}$ का तो हम

$$|+x| = x, \; |-x| = x$$

लिखते हैं और कहते हैं कि परिमेय संख्याओं $+x$ और $-x$ में से प्रत्येक का निरपेक्ष मान x है।

हम $|0| = 0$ भी लिखते हैं। इस प्रकार 0 का निरपेक्ष मान स्वंय 0 ही है।

उदाहरणार्थ

$$\left|-\frac{7}{12}\right| = \frac{7}{12}, \; |-5| = 5, \left|-\frac{14}{9}\right| = \frac{14}{9}, \; |-1 \cdot 5| = 1 \cdot 5$$

$$\left|+\frac{7}{12}\right| = \frac{7}{12}, \; |+5| = 5, \left|+\frac{14}{9}\right| = \frac{14}{9}, \; |+1 \cdot 5| = 1 \cdot 5.$$

प्रश्नावली

कुछ परिमेय संख्याएँ और उनमें से प्रत्येक का निरपेक्ष मान लिखिए।

टिप्पणी—बहुधा हम उपसर्ग के रूप में चिह्न + अथवा — से प्रत्यक्षतः रहित u को परिमेय संख्या मानेंगे। यहाँ यह जानना आवश्यक है कि u निहित नहीं है $\mathbf{F}$ में, और यह संयुक्त प्रतीक, जैसे

$$+\frac{3}{4}, -\frac{8}{11}, -\frac{9}{14}, +7.$$

का सूचक है।

निस्संदेह u के निरपेक्ष मान को $|u|$ द्वारा सूचित किया जाता है। अतः

$$u = +\frac{3}{4} \Rightarrow |u| = \frac{3}{4}$$

$$u = -\frac{8}{11} \Rightarrow |u| = \frac{8}{11}$$

$$u = -\frac{9}{14} \Rightarrow |u| = \frac{9}{14}$$
$$u = +7 \quad \Rightarrow |u| = 7.$$

34. परिमेय संख्याओं का योग

दो परिमेय संख्याओं के योगफल की परिभाषा यथारीति देने से पूर्व हम लाभ और हानि से संबद्ध स्थिति की परीक्षा करेंगे। इसके द्वारा दो परिमेय संख्याओं के योगफल की व्यापक परिभाषा देने के लिए उपयुक्त संकेत प्राप्त होंगे।

उदाहरण के लिए निम्नलिखित पर विचार कीजिए :

(*i*) $(+200)+(+300)$ (*ii*) $(-200)+(-300)$
(*iii*) $(+200)+(-300)$ (*iv*) $(-200)+(+300)$.

वर्ग (*i*) में दोनों परिमेय संख्याएँ धनात्मक और वर्ग (*ii*) में दोनों ऋणात्मक हैं।

वर्ग (*iii*) और (*iv*) की दोनों संख्याओं में से एक धनात्मक और दूसरी ऋणात्मक है। वर्ग (*iii*) में तो ऋणात्मक संख्या -300 का निरपेक्ष मान 300, धनात्मक संख्या $+200$ के निरपेक्ष मान 200 से अधिक है, किन्तु वर्ग (*iv*) में धनात्मक संख्या $+300$ का निरपेक्ष मान 300, ऋणात्मक संख्या -200 के निरपेक्ष मान 200 से अधिक है।

अब धनात्मक संख्या $+x$ का x रुपयों के लाभ और ऋणात्मक संख्या $-x$ का x रुपयों की हानि के सूचक-रूप में आख्यान करने पर निम्नलिखित निष्कर्ष प्राप्त होते हैं :

$$(+200)+(+300)=+500 \qquad \ldots(i)$$
$$(-200)+(-300)=-500 \qquad \ldots(ii)$$
$$(+200)+(-300)=-100 \qquad \ldots(iii)$$
$$(-200)+(+300)=-100 \qquad \ldots(iv)$$

अब हम उपर्युक्त समताओं में निहित विचारों के परीक्षण का प्रयत्न करते हैं।

वर्ग (*i*) में दोनों संख्याओं के धनात्मक होने से योगफल भी धनात्मक है और योगफल का निरपेक्ष मान निरपेक्ष मानों का योगफल है।

यहाँ

$$|+200|=200, \; |+300|=300$$
$$200+300=500$$

और इस प्रकार दो धनात्मक संख्याओं के निरपेक्ष मानों का योगफल 500 है।

अतः

$$(+200)+(+300)=+500$$

वर्ग (*ii*) में दोनों संख्याओं के ऋणात्मक होने से योगफल भी ऋणात्मक है और योगफल का निरपेक्ष मान निरपेक्ष मानों का योगफल है।

अतः

$$(-200)+(-300)=-500$$

वर्ग (*iii*) में दो संख्याओं में से एक तो धनात्मक है किन्तु दूसरी ऋणात्मक और ऋणात्मक संख्या का निरपेक्ष मान धनात्मक संख्या के निरपेक्ष मान से अधिक है। यहाँ योगफल ऐसी ऋणात्मक संख्या है जिसका निरपेक्ष मान ऋणात्मक संख्या के निरपेक्ष मान में से धनात्मक संख्या का निरपेक्ष मान घटाने पर प्राप्त होता है। इस प्रकार

$$(+200)+(-300)=-(\,|-300|-|+200|\,)$$
$$=-(300-200)=-100$$

अंततः वर्ग (*iv*) में एक संख्या तो धनात्मक है किन्तु दूसरी ऋणात्मक है और धनात्मक संख्या का निरपेक्ष मान ऋणात्मक संख्या के निरपेक्ष मान से अधिक है। यहाँ योगफल एक ऐसी धनात्मक संख्या है जिसका निरपेक्ष मान धनात्मक संख्या के निरपेक्ष मान में से ऋणात्मक संख्या का निरपेक्ष मान घटाने पर प्राप्त होता है। इस प्रकार

$$(-200)+(+300)=+(300-200)=+100$$

दो परिमेय संख्याओं के योगफल की व्यापक परिभाषा जानने से पूर्व पाठक के लिए उपर्युक्त संकेतों के आधार पर कुछ परिमेय संख्याओं के योगफल निकालना उपयोगी होगा।

पाठक नीचे दिए गए योगफल निकाले।

(*i*) $(+600)+(-700)$ (*ii*) $(+700)+(-600)$

(*iii*) $(-700)+(+600)$ (*iv*) $(-600)+(+700)$

(*v*) $(+800)+(+600)$ (*vi*) $(-800)+(-600)$

(*vii*) $(+600)+(+800)$ (*viii*) $(-600)+(-800)$

(*ix*) $(+3)+(-4)$ (*x*) $(-3)+(+4)$

(*xi*) $(-4)+(+3)$ (*xii*) $(+4)+(-3)$

(*xiii*) $\left(-\frac{7}{12}\right)+\left(+\frac{3}{2}\right)$ (*xiv*) $\left(+\frac{8}{17}\right)+\left(-\frac{9}{15}\right)$

(*xv*) $\left(+\frac{3}{4}\right)+\left(+\frac{7}{8}\right)$ (*xvi*) $\left(-\frac{3}{4}\right)+\left(-\frac{7}{8}\right)$

(*xvii*) $[(+6)+(-7)]+(-4)$ (*xviii*) $(+6)+[(-7)+(-4)]$.

(*xix*) $\left[\left(-\frac{2}{3}\right)+\left(+\frac{3}{4}\right)\right]+(+2)$

(*xx*) $\left(-\frac{2}{3}\right)+\left[\left(+\frac{3}{4}\right)+(+2)\right]$.

अब हम दो परिमेय संख्याओं की यथारीति और व्यापक परिभाषा देंगे। दो परिमेय संख्याओं के योगफल की परिभाषा देते समय कई विकल्पों का ध्यान रखना होगा। इन्हें हम एक एक करके लेते हैं।

दो परिमेय संख्याओं का योगफल

परिभाषा

निम्नलिखित में $x, y \in \mathbf{F}$.

(*i*) दोनों संख्याएँ धनात्मक हैं।

$$(+x)+(+y)=+(x+y).$$

(*ii*) दोनों संख्याएँ ऋणात्मक हैं।

$$(-x) + (-y) = -(x + y).$$

(*iii*) एक संख्या धनात्मक है तथा दूसरी ऋणात्मक और धनात्मक संख्या का निरपेक्ष मान ऋणात्मक संख्या के निरपेक्ष मान से अधिक है।

$$(+x) + (-y) = +(x - y),\ x > y.$$

(*iv*) एक संख्या धनात्मक है तथा दूसरी ऋणात्मक और ऋणात्मक संख्या का निरपेक्ष मान धनात्मक संख्या के निरपेक्ष मान से अधिक है।

$$(+x) + (-y) = -(y - x),\ y > x.$$

(*v*) एक संख्या धनात्मक है तथा दूसरी ऋणात्मक और दोनों संख्याओं का निरपेक्ष वही है।

$$(+x) + (-x) = 0.$$

(*vi*) यदि एक अथवा दोनों संख्याएँ 0 हों तो

$$(+x) + 0 = +x$$
$$(-x) + 0 = -x$$
$$0 + 0 = 0.$$

टिप्पणी—यह ध्यान देना अत्यन्त आवश्यक है कि

(*i*) दो धनात्मक परिमेय संख्याओं का योगफल धनात्मक होता है।

(*ii*) दो ऋणात्मक परिमेय संख्याओं का योगफल ऋणात्मक होता है।

प्रश्नावली

1. $u+v$ और $v+u$ निकालिए यदि

(*i*) $u = (-12),\ v = (+17)$ (*ii*) $u = (-35),\ v = (+12)$

(*iii*) $u = \left(-2\frac{3}{4}\right),\ v = \left(+3\frac{5}{7}\right)$

(*iv*) $u = \left(-\frac{7}{8}\right),\ v = \left(-\frac{3}{5}\right)$ (*v*) $u = (-4{\cdot}45),\ v = (7{\cdot}35)$

(*vi*) $u = (+14{\cdot}35),\ v = (-12{\cdot}29)$

(*vii*) $u = (-0{\cdot}51),\ v = (+3{\cdot}41)$ (*viii*) $u = (-5),\ v = (+5)$

(*ix*) $u = 0,\ v = (-1{\cdot}4)$ (*x*) $u = -5,\ v = 0$

(*xi*) $u = +\frac{2}{3},\ v = -\frac{2}{3}$ (*xii*) $u = +\frac{7}{3},\ v = 0$

(*xiii*) $u = 0,\ v = \frac{-8}{9}$ (*xiv*) $u = -\frac{3}{5},\ v = +\frac{2}{3}$

2. $(u+v)+w$ और $u+(v+w)$ निकालिए यदि

(*i*) $u = (-9),\ v = (+8),\ w = (-5)$

(*ii*) $u = \left(-\frac{3}{4}\right),\ v = \left(+\frac{5}{12}\right),\ w = \left(-\frac{7}{6}\right)$

(*iii*) $u = (+8{\cdot}25),\ v = (-4{\cdot}35),\ w = (-12{\cdot}75)$

(*iv*) $u = \left(-\frac{2}{3}\right),\ v = \left(+\frac{4}{3}\right),\ w = \left(-\frac{1}{2}\right)$

3. $(u+v)+(w+t)$ और $[(u+v)+w]+t$ निकालिए यदि

(*i*) $u = (-2), v = (+5), w = (-35), t = (-8)$

(*ii*) $u = (+2{\cdot}25), v = (-4{\cdot}25), w = (-3{\cdot}35), t = (+7{\cdot}15)$

(*iii*) $u = \left(-\frac{2}{3}\right), v = \left(+\frac{4}{3}\right), w = \left(-\frac{1}{2}\right), t = \left(+\frac{3}{4}\right).$

4. सिद्ध कीजिए कि

$$|u+v| \leqslant |u| + |v| \ \forall \ u, v \in \mathbf{Q}.$$

परिमेय संख्याओं u, v के कुछ विशेष युग्म लेकर इस परिणाम के उदाहरण दीजिए।

विशेषत: संख्याओं uv, v के ऐसे युग्म दीजिए जिनके लिए

$$|u+v| < |u| + |v|.$$

Q में योग संयोजन के नियम

I. योग की क्रम विनिमेयता होती है अर्थात्

$$u + v = v + u \ \forall \ u, v \in \mathbf{Q}.$$

दो परिमेय संख्याओं के योगफल की परिभाषा का यह सीधा परिणाम है।

II. योग की सहचारिता होती है अर्थात्

$$u + (v + w) = (u + v) + w \ \forall \ u, v, w \in \mathbf{Q}.$$

इसकी उत्पत्ति देने से पूर्व हम एक विशेष उदाहरण लेते हैं।

मान लीजिए कि

$$u = +5, v = -3, w = -17.$$

अब

$$u + v = (+5) + (-3) = +(5-3) = +2$$

$$(u+v) + w = (+2) + (-17) = -(17-2) = -15.$$

पुन:

$$v + w = (-3) + (-17) = -(3+17) = -20$$

$$u + (v+w) = (+5) + (-20) = -(20-5) = -15.$$

अत: इस उदाहरण में

$$(u+v) + w = u + (v+w)$$

Q में योग संयोजन की सहचारिता की उपपत्ति के लिए हमें कई विकल्प लेने होंगे। इनमें से हम केवल कुछेक ही ले रहे हैं।

(*i*) u, v, w सभी धनात्मक हैं।

मान लीजिए कि

$$u = +x, v = +y, w = +z\,;\ x, y, z \in \mathbf{F}.$$

अब

$$\begin{aligned}(u+v) + w &= [(+x) + (+y)] + (+z)\\ &= [+(x+y)] + (+z) = +[(x+y)+z],\\ u + (v+w) &= (+x) + [(+y) + (+z)]\\ &= (+x) + [+(y+z)] = +[x+(y+z)].\end{aligned}$$

क्योंकि **F** में योग की सहचारिता होती है और $x, y, z, \in \mathbf{F}$ इसलिए

$$(x + y) + z = x + (y + z).$$

अतः

$$(u + v) + w = u + (v + w).$$

(*ii*) u, v, w सभी ऋणात्मक हैं।

मान लीजिए कि

$$u = -x, v = -y, w = -z\ ; x, y, z \in \mathbf{F}.$$

$$(u + v) + w = [(-x) + (-y)] + (-z)$$

अब

$$\begin{aligned}(u + v) + w &= [(-x) + (-y)] + (-z)\\ &= [-(x + y)] + (-z) = -[(x + y) + z],\\ u+(u+w) &= (-x) + [-(y + z)]\\ &= -[x + (y + z)]\\ &= -[(x + y) + z] = (u + v) + w.\end{aligned}$$

(*iii*) u धनात्मक, v धनात्मक और w ऋणात्मक है तथा

$$|u| + |v| < |w|.$$

मान लीजिए कि

$$u = +x, v = +y, w = -z$$

इस प्रकार

$$x + y < z.$$

अब

$$x + y < z \Rightarrow y < z - x.$$

साथ ही

$$x + y < z \Rightarrow x < z - y$$

अब

$$\begin{aligned}(u + v) + w &= [(+x) + (+y)] + (-z)\\ &= [+(x + y)] + (-z)\\ &= -[z - (x + y)]\\ u + (v + w) &= (+x) + [(+y) + (-z)\\ &= (+x) + [-(z - y)]\\ &= -[(z - y) - x] = -[z - (y + x)]\\ &= -[z - (x + y)]\\ &= (u + v) + w.\end{aligned}$$

दूसरे विकल्पों को भी ठीक इसी प्रकार निबटाया जा सकता है।

योग–तत्समक का अस्तित्व

$$u + 0 = u = 0 + u \ \forall\ u \in \mathbf{Q}.$$

इस नियम के कारण संख्या 0 को योग-तत्समक अथवा योग के लिए निष्प्रभाव अवयव भी कहते हैं।

परिमेय संख्या की विपरीत संख्या

परिमेय संख्या $+3$ लीजिए। इस परिमेय संख्या के अनुरूप एक परिमेय संख्या -3 इस प्रकार है कि दोनों का योगफल, योग तत्समक शून्य है। वास्तव में प्रत्येक परिमेय संख्या के अनुरूप एक परिमेय संख्या इस प्रकार होती है कि दोनों का योगफल 0 होता है। इसलिए $\left(-\frac{11}{17}\right)$ के अनुरूप $\left(+\frac{11}{17}\right)$ है और $\left(+\frac{11}{17}\right)$ के अनुरूप $\left(-\frac{11}{17}\right)$ है।

व्यापक रूप में धनात्मक परिमेय संख्या $(+x)$ के अनुरूप ऋणात्मक परिमेय संख्या $(-x)$ और ऋणात्मक परिमेय संख्या $(-x)$ के अनुरूप धनात्मक परिमेय संख्या $(+x)$ इस प्रकार होती हैं कि दोनों का योगफल योग-तत्समक शून्य होता है :

$$(+x) + (-x) = 0.$$

निस्संदेह परिमेय संख्या 0 के अनुरूप स्वयं परिमेय संख्या 0 इस प्रकार है कि

$$0 + 0 = 0.$$

अत: प्रत्येक परिमेय संख्या u के अनुरूप एक परिमेय संख्या v इस प्रकार होती है कि

$$u + v = 0 = v + u.$$

उदाहरणार्थ

यदि

$$u = +7,$$

तो

$$v = -7; \text{ और}$$

यदि

$$u = -\frac{3}{7},$$

तो

$$v = +\frac{3}{7}.$$

u, v में से प्रत्येक को दूसरे का योग-प्रतिलोभ, विपरीत अथवा ऋण कहते हैं और हम

$$u = -v \text{ तथा } v = -u.$$

लिखते हैं।

इस प्रकार परिमेय संख्याओं

$$-\frac{7}{5}, +11, +\frac{8}{9}, -\frac{12}{17}, -\frac{18}{29}, 0$$

के विपरीत क्रमशः

$$+\frac{7}{5}, -11, -\frac{8}{9}, +\frac{12}{17}, +\frac{18}{29}, 0$$

हैं।

(*i*) किसी संख्या के ऋण और (*ii*) किसी ऋणात्मक संख्या में भेद करना आवश्यक है। किसी संख्या के ऋण का ऋणात्मक संख्या होना आवश्यक नहीं है और वस्तुतः किसी संख्या का ऋण उस संख्या के ऋणात्मक अथवा धनात्मक होने के अनुसार क्रमशः धनात्मक अथवा ऋणात्मक होता है।

सामान्यतया हम 'परिमेय संख्या का ऋण' लिखने के स्थान पर 'परिमेय संख्या का विपरीत' लिखेंगे।

यह उल्लेखनीय है किसी परिमेय संख्या के विपरीत का विपरीत वह संख्या स्वयं होती है। अतः

$$-(-u) = u \ \forall \ u \in \mathbf{Q}.$$

अब हम दो परिमेय संख्याओं के योगफल के विपरीत से सम्बद्ध परिणाम को लिखेंगे और सिद्ध करेंगे।

प्रमेय

दो परिमेय संख्याओं के योगफल का विपरीत संख्याओं का योगफल होता है अर्थात्

$$-(u+v) = (-u) + (-v) \ \forall \ u, v \in \mathbf{Q},$$

व्यापक उपपत्ति देने से पूर्व हम एक विशेष उदाहरण लेते हैं।

मान लीजिए कि

$$u = -7, v = +5$$

इस प्रकार

$$u + v = (-7) + (+5) = -(7-5) = -2.$$

अब

$$\begin{aligned} -u &= -(-7) = +7 \\ -v &= -(+5) = -5 \\ (-u) + (-v) &= (+7) + (-5) \\ &= +(7-5) \\ &= +2 = -(-2) \\ &= -(u+v). \end{aligned}$$

उपपत्ति

$$\begin{aligned} &(u+v) + [(-u) + (-v)] \\ &= (v+u) + [(-u) + (-v)] \\ &= v + \{u + [(-u) + (-v)]\} \\ &= v + \{[u + (-u)] + (-v)\} \\ &= v + \{0 + (-v)\} = v + (-v) = 0. \end{aligned}$$

अन्ततः

$$\begin{aligned} &(u+v) + [(-u) + (-v)] = 0 \\ \Rightarrow &-(u+v) = (-u) + (-v). \end{aligned}$$

प्रश्नावली

1. निम्नलिखित परिमेय संख्याओं की विपरीत संख्याएँ दीजिए :

(*i*) $+3$ (*ii*) $-\frac{7}{3}$

(*iii*) $-2{\cdot}25$ (*iv*) $(+3) + (-5)$

(*v*) $\left(-\frac{2}{3}\right)+\left(-\frac{3}{4}\right)$ (*vi*) $(+3)+\left(-\frac{2}{3}\right)$.

2. कोई पाँच धनात्मक तथा कोई पाँच ऋणात्मक परिमेय संख्याएँ लिखिए और उनकी विपरीत संख्याएँ दीजिए।

3. -3 के ऋण में -3 और $+4$ के ऋण में $+4$ जोड़िए।

4. परिमेय संख्याओं के किन्हीं पाँच युग्मों u, v को लेकर उपर्युक्त प्रमेय को सत्यापित कीजिए।

टिप्पणी

1. यह ध्यान देने योग्य है कि किसी परिमेय संख्या और उसकी विपरीत संख्या के निरपेक्ष मान बराबर होते हैं, अर्थात्

$$|u| = |-u| \ \forall \ u \in \mathbf{Q}.$$

विशेषतः

$$|-3| = |-(-3)|.$$

2. यह महत्वपूर्ण है कि ऊपर के विवेचन में हमने ऋण चिह्न '—' का प्रयोग दो विभिन्न अर्थों में किया है। किसी भिन्न से पूर्व रखे जाने पर यह ऋणात्मक परिमेय संख्या का तथा किसी परिमेय संख्या से पूर्व रखे जाने पर यह उसकी विपरीत संख्या का सूचक होता है।

भिन्न

$$3, \frac{3}{5}, \frac{5}{7}$$

लेने पर हम देखते हैं कि

$$-3, -\frac{3}{5}, -\frac{5}{7}$$

ऋणात्मक परिमेय संख्याएं हैं। पुनः परिमेय संख्याएँ

$$-3, -\frac{3}{5}, -\frac{5}{7}, +2, +4$$

लेने पर हम देखते हैं कि

$$-(-3), -\left(-\frac{3}{5}\right), -\left(-\frac{5}{7}\right), -(+2), -(+4)$$

परिमेय संख्याओं

$$+3, +\frac{3}{5}, +\frac{5}{7}, -2, -4.$$

की सूचक हैं।

ऋण चिह्न '—' का एक तीसरा प्रयोग व्यवकलन को सूचित करने के लिए भी होता है। इस स्थिति में यह चिह्न किसी संख्या के पूर्व न आकर दो संख्याओं के बीच में आता है। अतः हमें ऋण चिह्न के इन तीन प्रयोगों में भ्रम नहीं होने देना चाहिए।

व्यवकलन

कोई दो परिमेय संख्याएँ u, v लीजिए। तब व्यंजक

$$u - v$$

ऐसी परिमेय संख्या, यदि वह विद्यमान हो, w को सूचित करता है जिसके लिए

$$u = v + w.$$

तब हम

$$w = u - v \Leftrightarrow u = v + w.$$

लिखते हैं।

हम सिद्ध करेंगे कि परिमेय संख्याओं u, v के प्रत्येक युग्म के अनुरूप संख्या w होती है।

पहले हम कुछ विशेष उदाहरण लेंगे।

1. यदि

$$u = +3, v = -7$$

तो

$$(+3) - (-7)$$

लीजिए।

हम एक ऐसी संख्या w ढूँढते हैं जिसके लिए

$$w + (-7) = +3$$

थोड़ा सा चिन्तन यह सुझाता है कि

$$w = (+10)$$

से काम चल जाएगा।

पुनः

$$(-7) - (+5).$$

लीजिए।

हम एक ऐसी संख्या w ढूढते हैं जिसके लिए

$$w + (+5) = -7.$$

यह देखा जा सकता है कि

$$w = -12.$$

अब हम एक प्रमेय लिखेंगे और उसे सिद्ध करेंगे।

प्रमेय

$$u - v = u + (-v) \ \forall\ u, v \in \mathbf{Q}.$$

उपपत्ति

$$[u + (-v)] + v = u + [(-v) + v] = u + 0 = u$$
$$\Rightarrow u + (-v) = u - v.$$

नियम—u में से v घटाने के लिए u में v का विपरीत जोड़िए।

प्रतीक रूप में

$$u - v = u + (-v), u, v \in \mathbf{Q}.$$

उदाहरण

(i) $(+12)-(+3)=(+12)+(-3)=+9$

(ii) $(-8)-(-10)=(-8)+(+10)=+2$

(iii) $(-5{\cdot}42)-(-6{\cdot}17)=(-5{\cdot}42)+(+6{\cdot}17)=+0{\cdot}75$

(iv) $\left[+\frac{9}{11}\right]-\left[-\frac{6}{22}\right]=\left[+\frac{9}{11}\right]+\left[+\frac{6}{22}\right]=+\frac{24}{22}=+\frac{12}{11}$

(v) $\left[-4\frac{1}{3}\right]-\left[-2\frac{2}{3}\right]=\left[-4\frac{1}{3}\right]+\left[+2\frac{2}{3}\right]=-\frac{5}{3}$

(vi) $\left[-7\frac{1}{2}\right]-\left[+2\frac{2}{5}\right]=\left[-7\frac{1}{2}\right]+\left[-2\frac{2}{5}\right]=-9\frac{9}{10}$;

प्रश्नावली

1. $u-v$ निकालए, यदि

(i) $u=+8, v=-2$ (ii) $u=-21, v=0$

(iii) $u=0, v=-\frac{2}{3}$ (iv) $u=+0{\cdot}25, v=+0{\cdot}05$

(v) $u=-\frac{5}{6}, v=+\frac{10}{12}$.

2. $u+(v-w), (u-v)+w, (u-v)-w$

निकालिए यदि

(i) $u=+7, v=-3. \quad w=-5$

(ii) $u=-\frac{7}{3}, v=+\frac{2}{5}, w=-\frac{1}{8}$

(iii) $u=-1{\cdot}25, v=-2{\cdot}35, w=+1{\cdot}05$.

3. $|u-v|$ निकालिए यदि

(i) $u=+3, v=-5$ (ii) $u=-\frac{7}{3}, v=-\frac{2}{5}$

(iii) $u=-1, v=+\frac{5}{3}$ (iv) $u=+\frac{3}{5}, v=+\frac{2}{7}$

टिप्पणी दो परिमेय संख्याओं के योगफल के विपरीत का विचार कर चुकने पर अब हम दो संख्याओं के अंतर के विपरीत का विचार करते हैं।

प्रमेय

$$-(u-v)=v-u \qquad \forall\ u, v \in \mathbf{Q}.$$

उपपत्ति

$$\begin{aligned}(u-v)+(v-u) &= [u+(-v)]+[v+(-u)]\\ &= u+\{(-v)+[v+(-u)]\}\\ &= u+\{[(-v)+v]+(-u)\}\\ &= u+\{0+(-u)\}\\ &= u+(-u)\\ &=0\end{aligned}$$

और इसलिए

$$v - u = -(u - v).$$

प्रश्नावली

ऊपर सिद्ध किया गया परिणाम सत्यापित कीजिए यदि

(i) $u = (+7), v = (-3)$ (ii) $u = -\frac{8}{5}, v = -\frac{3}{2}$

(iii) $u = +\frac{7}{3}, v = -\frac{5}{4}$ (iv) $u = -3{\cdot}25, v = +1{\cdot}15.$

35. परिमेय संख्याओं का गुणन

दो परिमेय संख्याओं के गुणनफल की व्यापक परिभाषा देने से पूर्व हम एक विशेष उदाहरण लेते हैं तथा कुछ ऐसे विचार प्रस्तुत करते हैं जो व्यापक परिभाषा के प्रेरक होंगे और उसे सुझाएँगे।

निम्नलिखित गुणनफल लीजिए

(i) $(+3) \times (+2)$
(ii) $(+3) \times (-2)$
(iii) $(-3) \times (-2)$
(iv) $(-3) \times (+2)$.

एक ऐसी कार की कल्पना कीजिए जो किसी वेग u से चल रही है। उदाहरण के लिए मान लीजिए कि कार 30 कि० मी० प्रति घण्टा की चाल से पूर्व की ओर चल रही है।

$$(+2) \times u$$

उस वेग का सूचक है जिसका परिमाण वेग u के परिमाण से दुगना अर्थात् $|+2|$ गुणा है और जिसकी दिशा वही है जो u की है।

$$(-2) \times u$$

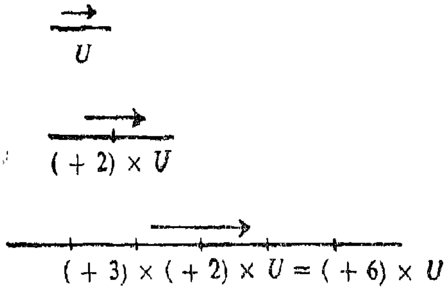
उस वेग का सूचक है जिसका परिमाण u के परिमाण का दुगुना अर्थात् $|-2|$ गुणा है और जिसकी दिशा u की दिशा के विपरीत है।

अब हम निम्नलिखित वेग लेते हैं।

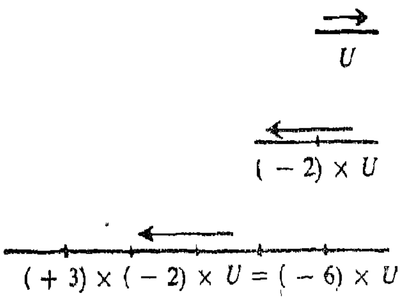
(i) $(+3) \times (+2) \times u$
(ii) $(+3) \times (-2) \times u$
(iii) $(-3) \times (-2) \times u$
(iv) $(-3) \times (+2) \times u$

इन चार वर्गों में से प्रत्येक की स्थिति अनुरूप आकृतियों में दिखाई गई है।

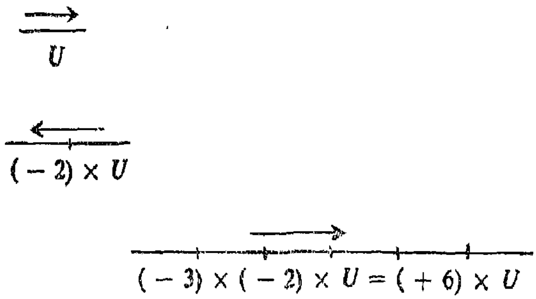
(i)



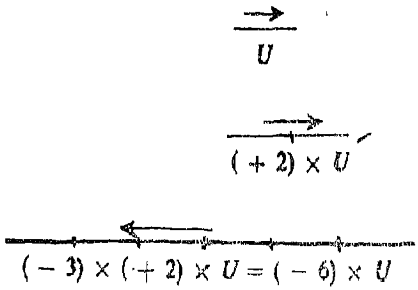
(ii)



(iii)



(iv)



अतः वेग को किसी धनात्मक संख्या से गुणा करने पर वेग की दिशा वही रहती है किन्तु ऋणात्मक संख्या से गुणा करने पर वेग की दिशा उलट जाती है। इसलिए, विशेषतः, दो ऋणात्मक संख्याओं से उत्तरोत्तर गुणा करने पर वेग की दिशा वही रहती है।

अतः, ऐसा लगता है कि निम्नलिखित समताएँ होंगी।

$$(+3) \times (+2) = +(3 \times 2) = (+6)$$
$$(+3) \times (-2) = -(3 \times 2) = (-6)$$
$$(-3) \times (-2) = +(3 \times 2) = (+6)$$
$$(-3) \times (+2) = -(3 \times 2) = (-6)$$

इस प्रकार दो संख्याओं के गुणनफल की निम्नलिखित परिभाषा प्राप्त होती है। निस्संदेह, हमें विभिन्न प्रकरण लेने होंगे।

I. u, v दोनों धनात्मक हैं।

$$u \times v = +(|u| \times |v|)$$

II. u, v दोनों ऋणात्मक हैं।

$$u \times v = +(|u| \times |v|)$$

III. u धनात्मक और v ऋणात्मक।

$$u \times v = -(|u| \times |v|)$$

IV. u ऋणात्मक है और v धनात्मक।

$$u \times v = -(|u| \times |v|)$$

V. एक संख्या शून्य है। दूसरी संख्या कुछ भी हो, गुणनफल शून्य ही होगा।

$u \times v$ के स्थान पर हम $u.v$ अथवा uv लिख सकते हैं।

नियम निम्नलिखित रूप में भी लिखे जा सकते हैं :

नीचे $x, y \in \mathbf{F}$.

(i) $(+x) \times (+y) = +(x \times y)$

(ii) $(-x) \times (-y) = +(x \times y)$

(iii) $(+x) \times (-y) = -(x \times y)$

(iv) $(-x) \times (+y) = -(x \times y)$.

टिप्पणी स्पष्ट है कि दो धनात्मक अथवा दो ऋणात्मक संख्याओं का गुणनफल धनात्मक ही होता है। साथ ही एक धनात्मक और एक ऋणात्मक संख्या का गुणनफल ऋणात्मक होता है।

प्रश्नावली

1. निम्नलिखित का परिकलन कीजिए।

(i) $(+25)(-11)$

(ii) $\left(-\frac{3}{4}\right)\left(\frac{7}{8}\right)$

(iii) $(+1{\cdot}02) \times \left(-\frac{1}{2}\right)$

(iv) $(+7{\cdot}6)(-0{\cdot}8)$

(v) $(-0{\cdot}20)(+5)$

(vi) $\left(-\frac{3}{10}\right)\left(+\frac{5}{7}\right)$.

2. $(u \times v) \times w, u \times (u \times w)$ निकालिए यदि

(i) $u = -3, \quad v = +5, \quad w = +8$

(ii) $u = -\frac{3}{4}, \quad v = +\frac{4}{5}, \quad w = +\frac{2}{3}$

(iii) $u = -0{\cdot}7, \quad v = -24, \quad w = 0$

(iv) $u = -3{\cdot}5, \quad v = -0{\cdot}2, \quad w = +6$

(v) $u = +3, \quad v = -4, \quad w = -1{\cdot}5.$

3. निम्नलिखित गुणनफलों के योग प्रतिलोम अर्थात् विपरीत निकालिए।

(i) $(-7)(-3)$ (ii) $(-2)(+9)$

(iii) $\left(-\frac{4}{3}\right)\left(+\frac{6}{5}\right)$ (iv) $\left(+\frac{3}{7}\right)\left(+\frac{2}{3}\right)$

4. $(u-v)(w-t)$ निकालिए यदि

(i) $u = +\frac{1}{2}, \quad v = -\frac{1}{3}, \quad w = -\frac{1}{5}, \quad t = 0$

(ii) $u = -6, \quad v = +2, \quad w = +2, \quad t = -3$

(iii) $u = -4, \quad v = -5, \quad w = +1, \quad t = -2$

5. निम्नलिखित कथनों को सत्य बनाने के लिए रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए।

(i) $+5 \times$ ——— $= +30$ (ii) $+3 \times$ ——— $= -6$

(iii) $-3 \times$ ——— $= +9$ (iv) $-8 \times$ ——— $= +4$

(v) $-4 \times$ ——— $= +1$ (vi) $+\frac{3}{7} \times$ ——— $= +1.$

I. **Q**. में गुणन संयोजन की क्रमविनिमेयता होती है अर्थात्

$$u \times v = v \times u \;\forall\; u, v \in \mathbf{Q}.$$

इस कथन की सत्यता **F** में गुणन की क्रमविनिमेयता का सीधा परिणाम है। **F** में गुणन की क्रमविनिमेयता के फलस्वरूप निश्चय ही

$$|u| \times |v| = |v| \times |u|, \; |u|, |v| \in \mathbf{F}.$$

II. **Q**. में गुणन-संयोजन की सहचारिता होती है अर्थात्

$$(u \times v) \times w = u \times (v \times w) \;\forall\; u, v, w \in \mathbf{Q}.$$

पहले हम एक विशेष उदाहरण लेते हैं।

मान लीजिए कि

$$u = -3, \quad v = +6, \quad w = -5.$$

अब

$$u \times v = (-3) \times (+6) = -(3 \times 6) = -18$$
$$(u \times v) \times w = (-18) \times (-5) = +(18 \times 5) = +90$$
$$v \times w = (+6) \times (-5) = -(6 \times 5) = -30$$
$$u \times (v \times w) = (-3) \times (-30) = +(3 \times 30) = +90$$

इसके परिणाम स्वरूप दी हुई परिमेय संख्याओं u, v, w के लिए

$$(u \times v) \times w = u \times (v \times w)$$

अब व्यापक रूप में विचार कीजिए। मान लीजिए कि u, v, w कोई तीन परिमेय संख्याएँ हैं। यदि $u, v\ w$ में से सभी संख्याएँ धनात्मक हों अथवा दो ऋणात्मक और एक धनात्मक हो तो यह सरलतापूर्वक देखा जा सकता है कि

$$(u \times v) \times w = +[(|u| \times |v|) \times |w|]$$
$$u \times (v \times w) = +[|u| \times (|v| \times |w|)]$$

साथ ही, **F** में गुणन-संयोजन की सहचारिता होने और $|u|, |v|, |w|$ सभी के **F** में निहित होने के कारण

$$(|u| \times |v|) \times |w| = |u| \times (|v| \times |w|).$$

परिणामतः, इस प्रकरण में

$$(u \times v) \times w = u \times (v \times w)$$

यदि u, v, w सभी ऋणात्मक हों अथवा दो धनात्मक और एक ऋणात्मक हो तो भी इस परिणाम की सत्यता देखी जा सकती है।

इस प्रकरण में

$$(u \times v) \times w = -(|u| \times |v| \times |w|)$$
$$= u \times (v \times w).$$

गुणन-तत्समक

परिमेय संख्या $+1$ का गुणन नियम

प्रमेय

$$u \times (+1) = u \quad \forall\ u \in \mathbf{Q}.$$

उपपत्ति

प्रकरण I. यदि u धनात्मक हो तो

$$u = +|u|.$$

गुणनफल की परिभाषा के अनुसार

$$u \times (+1) = +(|u| \times 1) = +|u| = u.$$

प्रकरण II. यदि u ऋणात्मक हो तो

$$|u| = -u$$

गुणनफल की परिभाषा के अनुसार

$$u \times (+1) = -(|u| \times 1)$$
$$= -|u| = u.$$

प्रकरण III. यदि u शून्य हो तो

$$u \times (+1) = 0 \times (+1) = 0 = u.$$

अ-शून्य परिमेय संख्याओं के गुणन-प्रतिलोम अथवा व्युत्क्रम

प्रमेय

प्रत्येक अ-शून्य परिमेय संख्या u के अनुरूप एक ऐसी अ-शून्य परिमेय संख्या v होती है कि

$$u \times v = +1.$$

उपपत्ति

प्रकरण 1. यदि u धनात्मक हो तो

$$u = |u|.$$

निश्चय ही $|u| \in \mathbf{F}$. ऐसी परिमेय संख्या v का विचार कीजिए जिसकी परिभाषा निम्नलिखित है:

$$v = +\frac{1}{|u|}.$$

u, v दोनों के धनात्मक होने पर

$$u \times v = +\left(|u| \times \frac{1}{|u|}\right) = +1.$$

प्रकरण 2. यदि u ऋणात्मक हो तो

$$u = -|u|, |u| \in \mathbf{F}.$$

हम

$$v = -\frac{1}{|u|}.$$

लेते हैं।

u, v दोनों के ऋणात्मक होने पर

$$u \times v = +\left(|u| \times \frac{1}{|u|} \right) = +1.$$

परिभाषा—अ-शून्य परिमेय संख्या u के अनुरूप एक ऐसी अ-शून्य v परिमेय संख्या होती है कि $u \times v = +1$ और जिसे u का व्युत्क्रम कहते हैं।

वास्तव में, u, v में से प्रत्येक दूसरे का व्युत्क्रम होता है।

सार-रूप में u, v में से प्रत्येक दूसरे का गुणन-प्रतिलोम है।

टिप्पणी यह बात अत्यन्त महत्वपूर्ण है कि परिमेय संख्या शून्य का कोई व्युत्क्रम नहीं होता। कारण यह है कि

$$u \times 0 = 0 \qquad \forall\ u \in \mathbf{Q}.$$

अब हम शून्य के व्युत्क्रम का अस्तित्व होने से उत्पन्न स्थिति की परीक्षा करेंगे।

यदि संभव हो तो मान लीजिए कि 0 का व्युत्क्रम u है।

तब

$$u \times 0 = 1.$$

साथ ही

$$u \times 0 = 0.$$

अतः

$$\left.\begin{array}{l} u \times 0 = 1 \\ u \times 0 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 0 = 1.$$

हम देखते हैं कि शून्य के व्युत्क्रम की संभावना स्वीकार करने पर मिथ्या कथन $0 = 1$ प्राप्त हुआ। अतः '0' का व्युत्क्रम नहीं हो सकता।

सकारात्मक रूप में हम यह देख सकते हैं कि प्रमेय ने प्रत्येक अ-शून्य परिमेय संख्या के व्युत्क्रम का अस्तित्व प्रदर्शित किया है।

अब हम उपर्युक्त परिणाम के विलोम को प्रदर्शित करेंगे और सिद्ध करेंगे कि

$$uv = 0 \Rightarrow u = 0 \text{ तथा/अथवा } v = 0.$$

ऐसी दो परिमेय संख्याएँ u, v लीजिए जिनके लिए

$$uv = 0.$$

मान लीजिए कि $u \neq 0$

u के अ-शून्य परिमेय होने पर इसका व्युत्क्रम होगा, जैसे w.

अब

$$uv=0$$
$$\Rightarrow \quad w\,(uv) = w \times 0$$
$$\Rightarrow \quad (wu)\,v = 0$$
$$\Rightarrow (+1)\,v = 0$$
$$\Rightarrow \quad v = 0.$$

इस प्रकार u को अ-शून्य मानने पर निष्कर्ष यह हुआ कि $v = 0$. ठीक इसी प्रकार यह भी सिद्ध किया जा सकता है कि v के अ-शून्य होने की कल्पना के फलस्वरूप $u = 0$.

इस प्रकार यथाकथित परिणाम सिद्ध हुआ।

वस्तुतः

$$uv = 0 \Rightarrow u = 0 \text{ तथा/अथवा } v = 0.$$

प्रश्नावली

निम्नलिखित अ-शून्य परिमेय संखायाओं में से प्रत्येक का व्युत्क्रम दीजिए।

(i) $-3.$ (ii) $-\frac{2}{3}$ (iii) $+\frac{7}{8}$

(iv) $+2{\cdot}32$ (v) $-3{\cdot}25$ (vi) $-0{\cdot}35$

(vii) $-\frac{5}{4}$ (viii) $+\frac{4}{5}$ (ix) $-7{\cdot}05$

(x) $(-3)+(-5)$ (xi) $(+3)+(-2)$

(xii) $(+4)-(+5)$ (xiii) $\left(-\frac{2}{3}\right) \times \left(+\frac{4}{5}\right)$

(xiv) $\left(+\frac{1}{4}\right) \times \left(-\frac{7}{6}\right)$ (xv) $\left(-\frac{1}{2}\right) \times (-{\cdot}3)$

विभाजन

दो परिमेय संख्याएँ u, v लीजिए। हम मान लेते हैं कि v अ-शून्य परिमेय संख्या है।

अब हम व्यंजक

$$u \div v.$$

का अर्थ स्पष्ट करेंगे।

$u \div v$ ऐसी संख्या w, यदि वह विद्यमान हो, को सूचित करता है जिसके लिए

$$u = vw.$$

अत:

$$u \div v = w \Leftrightarrow u = vw.$$

व्यापक रूप में विचार करने से पूर्व हम कुछ विशेष उदाहरण लेते हैं :

(i) $(+6) \div (-2) = -3$ क्योंकि $(-2) \times (-3) = +6$

(ii) $(+5) \div (-3) = -\frac{5}{3}$ क्योंकि $(-3) \times \left(-\frac{5}{3}\right) = +5$

(iii) $\left(-\frac{7}{8}\right) \div \left(-\frac{3}{4}\right) = +\frac{7}{6}$

क्योंकि $\left(-\frac{3}{4}\right) \times \left(+\frac{7}{6}\right) = -\frac{7}{8}$.

व्यापक रूप में यदि $x, y \in \mathbf{F}$ तो

$$(+x) \div (+y) = +(x \div y)$$
$$(-x) \div (-y) = +(x \div y)$$
$$(+x) \div (-y) = -(x \div y)$$
$$(-x) \div (+y) = -(x \div y)$$

साथ ही हम यह देखते हैं कि दोनों संख्याओं u, v के धनात्मक अथवा ऋणात्मक होने पर

$$u \div v$$

धनात्मक है, और यदि संख्याएँ u, v में से एक धनात्मक और दूसरी ऋणात्मक हो तो $u \div v$ ऋणात्मक होगा।

भागफल के रूप में किसी अ-शून्य परिमेय संख्या का व्युत्क्रम

कोई अ-शून्य परिमेय संख्या v लीजिए। हम सिद्ध करेंगे कि v का व्युत्क्रम परिमेय संख्या

$$(+1) \div v.$$

होगी।

यहाँ

$$(+1) \div v = w \Rightarrow v \times w = +1$$

और इसलिए v का व्युत्क्रम w है।

अत: अ-शून्य परिमेय संख्या v का व्युत्क्रम परिमेय संख्या

$$(+1) \div v.$$

है।

अ-शून्य परिमेय संख्या के व्युत्क्रम के लिए प्रयुक्त इस व्यंजक के फलस्वरूप

$$u \div v = u \times (+1 \div v)$$

और इसलिए

$$u \div v$$

u के साथ v के व्युत्क्रम का गुणनफल है।

$u \div v$ के स्थान पर हम बहुधा वैकल्पिक प्रतीक

$$\frac{u}{v} \text{ अथवा } u/v.$$

का भी प्रयोग करते हैं।

टिप्पणी *1.* यह ध्यान देने योग्य है कि

$$u \div v$$

केवल अ-शून्य परिमेय संख्या v के लिए ही सार्थक है। अतः यह कहना उचित होगा कि 0 से विभाजन एक निरर्थक संक्रिया है।

टिप्पणी *2.* अ-शून्य परिमेय संख्याओं के समुच्चय को पृथक नाम देना उपयोगी सिद्ध होगा। इस कारण हम इस समुच्चय को

$$\mathbf{Q}_0$$

द्वारा सूचित करेंगे।

अतः समुच्चय $\mathbf{Q}_0$ समुच्चय $\mathbf{Q}$ से केवल संख्या शून्य के प्रसंग में विभिन्न है क्योंकि 0 ही एक ऐसी संख्या है जो $\mathbf{Q}$ में तो निहित है परंतु $\mathbf{Q}_0$ में नहीं। निस्संदेह

$$\mathbf{Q}_0 \subset \mathbf{Q}.$$

दो अ-शून्य परिमेय संख्याओं के गुणनफल का व्युत्क्रम

प्रमेय

दो अ-शून्य परिमेय संख्याओं के गुणनफल का व्युत्क्रम उनके व्युत्क्रमों का गुणनफल होता है।

उपपत्ति

मान लीजिए कि u, w कोई दो अ-शून्य परिमेय संख्याएँ जिनके व्युत्क्रम क्रमशः v, t हैं।

तब

$$uv = +1$$
$$wt = +1.$$

अतः

$$(uv)(wt) = (+1)(+1) = +1.$$

$\mathbf{Q}$ में गुणन-संयोजन की क्रमविनिमेयता और सहचारिता के कारण

$$+1 = (uv)(wt) = (uw)(vt)$$

इसलिए

uw का व्युत्क्रम vt है

अर्थात्

$$+1 \div (uw) = vt$$
$$= (+1 \div u)(+1 \div w)$$

वैकल्पिक व्यंजक का प्रयोग करने पर

$$\frac{+1}{uw} = \frac{+1}{u} \cdot \frac{+1}{w}.$$

उदाहरणार्थ

$$\frac{+1}{(+2)(-3)} = \frac{+1}{+2} \cdot \frac{+1}{-3} = \left(+\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{6}$$

$$\frac{+1}{(-4)(-5)} = \frac{+1}{-4} \cdot \frac{+1}{-5} = \left(-\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{1}{5}\right) = +\frac{1}{20}.$$

वितरण नियम

प्रमेय

$$u(v + w) = uv + uw \;\forall\; u, v, w \in \mathbf{Q}.$$

पहले एक विशेष उदाहरण लीजिए।

यदि

$$u = -3,\; v = -5,\; w = +2,$$

तो

$$\begin{aligned} v + w &= (-5) + (+2) &&= -3 \\ u(v + w) &= (-3)(-3) &&= +9 \\ uv &= (-3)(-5) &&= +15 \\ uw &= (-3)(+2) &&= -6 \\ uv + uw &= (+15) + (-6) &&= +9. \end{aligned}$$

u, v, w के उपर्युक्त मानों के लिए

$$u(v + w) = uv + uw$$

सिद्ध हो गया।

इसे व्यापक रूप में सिद्ध करने के लिए हमें बहुत से प्रकरण लेने होंगे।

हम केवल एक प्रकरण लेते हैं जिसमें u धनात्मक और v, w दोनों ऋणात्मक हैं।

मान लीजिए कि

$$u = +x,\; v = -y,\; w = -z.$$

तब

$$\begin{aligned} v + w &= -(y + z) \\ u(v + w) &= (+x)[-(y + z)] \\ &= -[x(y + z)] = -(xy + xz) \\ uv &= -(xy) \\ uw &= -(xz). \end{aligned}$$

साथ ही

$$\begin{aligned} uv + uw &= -(xy + xz) \\ &= u(v + w). \end{aligned}$$

दूसरे प्रकरण भी इसी प्रकार निबटाये जा सकते हैं।

36. परिमेय संख्याओं के समुच्चय में 'अधिक है...से' संबंध

परिभाषा यदि $u\ v \in \mathbf{Q}$ तो हम कहते हैं कि

u अधिक है v से

यदि

$u - v$ धनात्मक हो।

'u अधिक है v से' को सूचित करने के लिए हम प्रतीक रूप में

$$u > v$$

लिखते हैं।

अत:

$u > v \Leftrightarrow u - v$ धनात्मक है।

साथ ही

v न्यून है u से $\Leftrightarrow$ u अधिक है v से अथवा प्रतीक रूप में

$$v < u \Leftrightarrow u > v.$$

उदाहरण

(*i*) $+7 > +5$ क्योंकि $(+7) - (+5) = (+7) + (-5) = +2$

(*ii*) $+5 > -3$ क्योंकि $(+5) - (-3) = (+5) + (+3) = +8$

(*iii*) $-7 > -9$ क्योंकि $(-7) - (-9) = (-7) + (+9) = +2.$

यह ध्यान देना आवश्यक है कि

$$+x > +y \Leftrightarrow x > y$$
$$-x > -y \Leftrightarrow x < y.$$

यह अत्यंत स्मरणीय है कि ऋणात्मक परिमेय संख्या किसी दूसरी ऋणात्मक परिमेय संख्या से तब और तभी अधिक होती है जब उसका निरपेक्ष मान दूसरी के निरपेक्ष मान से न्यून हो। जैसे

$$-13 > -17 \text{ क्योंकि } |-13| < |-17|$$
$$-\frac{3}{4} > -2 \text{ क्योंकि } \left|-\frac{3}{4}\right| < |-2|.$$

व्यापक रूप में

$$-x > -y \Leftrightarrow |-x| < |-y|,\ x, y \in \mathbf{F}.$$

साथ ही प्रत्येक धनात्मक परिमेय संख्या, प्रत्येक ऋणात्मक परिमेय संख्या से अधिक होती है अर्थात् x, y कोई भिन्न हों तो

$$+x > -y$$

उदाहरणार्थ

$$+\frac{9}{8} > +\frac{7}{9}$$

$$-\frac{7}{9} > -\frac{9}{8}$$

$$+\frac{9}{8} > -\frac{7}{9}$$

$$+\frac{7}{9} > -\frac{9}{8}.$$

हम यह भी देखें कि प्रत्येक धनात्मक संख्या 0 से अधिक होती है और संख्या 0 प्रत्येक ऋणात्मक संख्या से अधिक होती है अर्थात् x, y कोई भिन्न हों तो

$$+x > 0 > -y$$

वास्तव में

$$(+x) - 0 = +x$$

$$0 - (-y) = +y.$$

उदाहरणार्थ

$$+\frac{7}{3} > 0 > -\frac{2}{5}.$$

प्रश्नावली

1. निम्नलिखित को आरोही-क्रम में लिखिए

(i) $-7, -\frac{11}{13}, +0{\cdot}25, +3, 0, -17, -9, +8$

(ii) $-3, +\frac{9}{3}, +\frac{1}{4}, -\frac{7}{12}, +\frac{5}{6}$

(iii) $+\frac{3}{4}, +\frac{1}{4}$ $0, -3, +10, -0{\cdot}25$

(iv) $-\frac{1}{3}, +\frac{3}{4}, -\frac{1}{6}, +\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, +\frac{5}{6}$

(v) $+\frac{8}{12}, -3, -\frac{2}{3}, +2\frac{1}{3}$

(vi) $+2, 0, -21, -7, +12, +21, -6, -12.$

2. निम्नलिखित कथनों में से कौन-से सत्य हैं ?

(i) $-{\cdot}3 > +{\cdot}03$ (ii) $+{\cdot}10 > +{\cdot}02$

(iii) $+1{\cdot}37 < +1{\cdot}378 < +1{\cdot}38.$

'अधिक है...से' संबंध के नियम

त्रिविकल्प नियम

प्रमेय : किन्हीं दो परिमेय संख्याओं u, v के लिए निम्नलिखित तीन विकल्पों में से एक और केवल एक ही होता है।

(*i*) $u > v$ (*ii*) $v > u$ (*iii*) $u = v$.

उपपत्ति

किसी परिमेय संख्या के प्रसंग में निम्नलिखित तीन विकल्पों में से एक और केवल एक ही होता है :

(*i*) संख्या धनात्मक है (*ii*) संख्या ऋणात्मक है (*iii*) संख्या शून्य है।

अतः u-v के प्रसंग में निम्नलिखित तीन विकल्पों में से एक और केवल एक ही होगा :

(*i*) u-v धनात्मक है (*ii*) u-v ऋणात्मक है (*iii*) u-v शून्य है।

हम इन तीनों प्रकरणों को एक-एक करके लेते हैं।

(*i*) u-v धनात्मक है $\Leftrightarrow u > v$

(*ii*) यदि u-v ऋणात्मक हो तो

$$-(u - v) = v - u$$

धनात्मक होगा। साथ ही $v - u$ धनात्मक है $\Leftrightarrow u > v$

(*iii*) $u - v = 0$ $\Leftrightarrow u = v$.

संक्रामकता

प्रमेय

$$u > v \text{ और } v > w \Rightarrow u > w.$$

उपपत्ति

$$u > v \Rightarrow u - v \text{ धनात्मक है}$$

$$v > w \Rightarrow v - w \text{ धनात्मक है}$$

साथ ही $u - v$, $v - w$ के धनात्मक होने पर

$$\begin{aligned}(u - v) + (v - w) &= [u + (-v)] + [v + (-w)] \\ &= u + [(-v) + v] + (-w) \\ &= u + 0 + (-w) \\ &= u + (-w) = u - w\end{aligned}$$

धनात्मक है और इस कारण

$$u > w,$$

योग संयोजन के साथ संगति

प्रमेय

$$u > v \Rightarrow u + w > v + w,$$

उपपत्ति

$$u > v \Rightarrow u - v \text{ धनात्मक है।}$$

साथ ही

$$(u + w) - (v + w) = (u + w) + [-(v + w)]$$

$$= (u + w) + [(- v) + (- w)]$$
$$= (u + w) + [(- w) + (- v)]$$
$$= u + [w + (- w) + (- v)]$$
$$= u + \{0 + (- v)\}$$
$$= u - v.$$

अतः हम देखते हैं कि

$$(u + w) - (v + w)$$

धनात्मक है और इस कारण

$$u + w > v + w.$$

गुणन संयोजन के साथ संगति

प्रमेय

$$u > v, w > 0 \Rightarrow uw > vw.$$

उपपत्ति

$$u > v \Rightarrow u - v \text{ धनात्मक है ।}$$

साथ ही u-v, w दोनों के धनात्मक होने पर

$$(u - v) w = u w - v w$$

भी धनात्मक है और इस कारण

$$u w > v w.$$

उपप्र०

$$u > v, w < 0 \Rightarrow uw < vw.$$

37. धनात्मक परिमेय संख्याओं के लिए प्रचलित संकेतन

मान लीजिए

$$\frac{a}{b}$$

कोई भिन्न है जहाँ $a, b \in \mathbf{N}$

इस भिन्न के अनुरूप दो परिमेय संख्याएँ

$$+\frac{a}{b}, \ -\frac{a}{b}.$$

हैं ।

अब हम धनात्मक संख्याओं के पूर्वस्थित चिह्न '+' को छोड़ने का निश्चय करते हैं । इस प्रकार हम

$$\frac{a}{b}, a \in \mathbf{N}, b \in \mathbf{N}$$

को ही धनात्मक परिमेय संख्या मानना स्वीकार करते हैं ।

यहाँ से आगे हम प्रत्येक भिन्न को एक धनात्मक परिमेय संख्या ही समझेंगे ।

जैसे,

$$3, \frac{5}{3}, 2{\cdot}35$$

को क्रमशः धनात्मक परिमेय संख्या

$$+3, +\frac{5}{3}, +2{\cdot}35,$$

से अभिन्न समझा जाएगा।

ऐसा समझ लेने पर, उदाहरण के लिए

$$3 - 4 + 5 - 7$$

और

$$(+3) - (+4) + (+5) - (+7).$$

अभिन्न हैं।

यह देखना आवश्यक है कि उपर्युक्त स्वीकृति से कोई भ्रम न होने पाए। उदाहरण के लिए, कथन

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$$

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

सत्य हैं यदि हम

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{5}{6}, \frac{1}{6}$$

को भिन्न अथवा इनके अनुरूप धनात्मक परिमेय संख्याएँ

$$+\frac{1}{2}, +\frac{1}{3}, +\frac{5}{6}, +\frac{1}{6}$$

मानें।

इसका कारण दो धनात्मक परिमेय संख्याओं के योगफल और गुणनफल की परिभाषा देने की विधि है, जिसे नीचे पुनः लिखा जा रहा है :

$$(+x) + (+y) = +(x + y)$$

$$(+x) \times (+y) = +(x \times y).$$

पुनः 'अधिक है . . से' संबंध के प्रसंग में हम जानते हैं कि

$$+x > +y \Leftrightarrow x > y.$$

38. परिमेय संख्याओं के पूर्णघात

प्रतीक का अर्थ

$$x^n ; x \in \mathbf{Q}, n \in \mathbf{I}.$$

विवेचन तीन भागों में किया जाएगा।

(*i*) घातांक n धनात्मक पूर्ण संख्या है।

(*ii*) घातांक n शून्य है।

(*iii*) घातांक n ऋणात्मक पूर्ण संख्या है।

प्रकरण I—मान लीजिए कि घातांक कोई धनात्मक पूर्ण संख्या है। परिभाषा के अनुसार

$$x^n = \underbrace{x \times x \times x \times x \times \dots\dots\dots \times x}_{n\text{-बार}},\ x \in \mathbf{Q}$$

अतः

$$x^1 = x$$
$$x^2 = x \times x$$
$$x^3 = x \times x \times x$$
$$x^4 = x \times x \times x \times x$$

और आगे भी इसी भाँति।

x^n को x का n-वाँ घात पढ़ते हैं। साथ ही बहुधा x^2 को x-वर्ग और x^3 को x—घन पढ़ते हैं। हमारी इस परिभाषा के फलस्वरूप निम्नलिखित परिणाम सीधे प्राप्त होते हैं।

(*i*) $x^n \times x^m = x^n \times x^m$

(*ii*) यदि $x \neq 0$

$$\frac{x^n}{x^m} = x^{n-m} \text{ यदि } n > m$$

$$\frac{x^n}{x^n} = 1$$

$$\frac{x^n}{x^m} = \frac{1}{x^{m-n}} \text{ यदि } m > n.$$

यहाँ m, n धनात्मक पूर्ण संख्याएँ हैं।

प्रकरण II—मान लीजिए कि घातांक शून्य है। हम प्रतीक x^0 को सार्थक बनाना चाहते हैं।

यदि हम चाहें कि परिणाम

$$\frac{x^n}{x^m} = x^{n-m},$$

$n = m$ होने पर भी सत्य रहे तो

$$1 = x^0,\ x \neq 0.$$

होना अनिवार्य है।

अतः x के कोई अ-शून्य परिमेय संख्या होने पर परिभाषा यह हुई कि

$$x^0 = 1,$$

x के परिमेय संख्या शून्य होने पर हमने प्रीतक x^0 को कोई अर्थ नहीं दिया।

प्रकरण III—मान लीजिए कि घातांक कोई ऋणात्मक पूर्ण संख्या है। यदि हम चाहें कि $m > n$ होने पर भी परिणाम $\frac{x^n}{x^m} = x^{n-m}$ सत्य रहे तो $\frac{x^0}{x^m} = x^{0-m} = x^{-m}$; m कोई धनात्मक पूर्ण संख्या है $\Rightarrow x^{-m} = \frac{1}{x^m}$, $x \neq 0$ होना अनिवार्य है।

अतः परिभाषा यह हुई कि

$$x^{-m} = \frac{1}{x^m};\ x \neq 0.$$

यह ध्यान देने योग्य है कि घातांक '$-m$' के ऋणात्मक पूर्ण संख्या होने पर प्रतीक

$$x^{-m}$$

तभी सार्थक है जब x के मान अ-शून्य हों। उदाहरणार्थ प्रतीक

$$x^{-2}$$

को x के शून्य होने पर कोई अर्थ नहीं दिया गया।

उदाहरण

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4$$

$$(-3)^0 \quad 1$$

$$(-4)^{-3} = \frac{1}{(-4)^3} = \frac{1}{-64} = -\frac{1}{64}.$$

प्रश्नावली

निम्नलिखित कथनों में से कौन-से सत्य हैं ? अपने उत्तर का समर्थन कीजिए।

(i) $(x^4)(x^{-2}) = x^2 \ \forall\ x \in \mathbf{Q}_0$

(ii) $(x^3)^2 = x^6 \ \forall\ x \in \mathbf{Q}$

(iii) $x^{(3^2)} = x^9 \ \forall\ x \in \mathbf{Q}$

(iv) $(x^{-5})(x^{-4}) = x^{-9} \ \forall\ x \in \mathbf{Q}$

(v) $\frac{1}{x^3} \cdot \frac{1}{x^6} \cdot \frac{1}{x^{-2}} = x^{-7} \ \forall\ x \in \mathbf{Q}$

(vi) $(xy)^{-2}(xy) = \frac{1}{xy} \ \forall\ x, y \in \mathbf{Q}_0$

(vii) $2^{-1}.3^{-2} = \frac{1}{2.3^2}$.

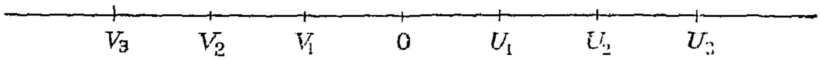
(viii) $3 \cdot x^m = \frac{3}{x^{-m}} \ \forall\ x \in \mathbf{Q}$.

39. रेखा के बिन्दुओं द्वारा परिमेय संख्याओं का निरुपण

पृष्ठ पर मुद्रित पंक्तियों के समांतर खींची हुई कोई रेखा लीजिए। हम रेखा पर किसी बिन्दु 0 को निश्चित करते हैं और इसे मूल बिन्दु कहते हैं।

बिन्दु 0 रेखा को दो भागों में इस प्रकार बाँटता है कि 0 से विभिन्न बिन्दु इसके दाईं अथवा बाईं ओर आते हैं।

बिन्दु 0 की दाईं ओर का रेखा-भाग धन पक्ष और 0 की बाईं ओर का रेखा-भाग ऋण पक्ष कहलाता है।



हम कोई लंबाई—एकक लेते हैं और मान लीजिए कि 0 के धन पक्ष में U_1 कोई ऐसा बिन्दु है जिसके लिए $0U_1$ एकक-लंबाई है।

0 की दाईं ओर एकक-लंबाई $0U_1$ के बराबर-बराबर दूरियाँ चलने पर जो बिन्दु प्राप्त होते हैं मान लीजिए कि उन्हें क्रमशः

$$U_1, U_2, U_3, U_4, \ldots\ldots$$

द्वारा सूचित किया गया है।

कहा जा सकता है कि ये बिन्दु क्रमशः धनात्मक पूर्ण संख्याओं

$$1, 2, 3, 4, \ldots\ldots$$

के अनुरूप हैं।

बिन्दु 0 को पूर्ण संख्या शून्य के अनुरूप कहा जाता है।

ठीक इसी प्रकार 0 की बाईं ओर $0U_1$ के बराबर दूरियाँ चलने पर बिन्दु

$$V_1, V_2, V_3, V_4, \ldots\ldots$$

प्राप्त करते हैं।

हम कहते हैं कि ये बिन्दु क्रमशः ऋणात्मक पूर्ण संख्याओं

$$-1, -2, -3, -4, \ldots\ldots$$

के अनुरूप हैं।

इस प्रकार, उदाहरण के लिए, यदि कोई बिन्दु P धनात्मक पूर्ण संख्या 15 के अनुरूप हो तो इसका अर्थ यह हुआ कि बिन्दु P बिन्दु O की दाईं ओर है और अंतर OP लंबाई के 15 एकक है। साथ ही यदि ऋणात्मक पूर्ण संख्या -15 के अनुरूप कोई बिन्दु Q हो तो इसका अर्थ यह हुआ कि बिन्दु Q बिन्दु 0 की बाईं ओर है और अंतर $0Q$ लंबाई के 15 एकक है।

अब कोई धनात्मक परिमेय संख्या

$$\frac{a}{b},$$

लीजिए। यहाँ a, b धन-संख्याएँ हैं।

हम मानते हैं कि $0U_1$ को b बराबर भागों में बांटा गया है। हम 0 की दाईं ओर a—पग चलते हैं। प्रत्येक पग की लंबाई एकक-लंबाई $0U_1$ के b—वें भाग के बराबर है। इस प्रकार प्राप्त बिन्दु को धनात्मक

परिमेय संख्या

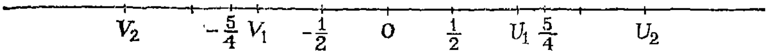
$$\frac{a}{b} : a, b \in \mathbf{N}.$$

के अनुरूप कहा जाता है।

0 के बाईं ओर a–पग चलने पर प्राप्त बिन्दु ऋणात्मक परिमेय संख्या

$$-\frac{a}{b}.$$

के अनुरूप है।

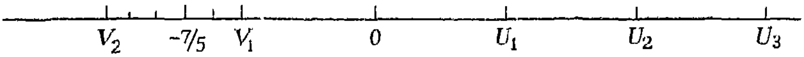


इस प्रकार हमने प्रत्येक परिमेय संख्या के साथ रेखा के ऐसे बिन्दु का संबंध जोड़ना सीख लिया है जिसके मूल बिन्दु से अंतर का माप बिन्दु की निरुपक परिमेय संख्या के निरपेक्ष मान के बराबर है।

उदाहरण के लिए, संख्याओं

$$+3, -\frac{7}{5}$$

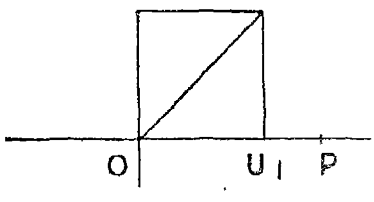
के निरूपक बिन्दुओं के मूल बिन्दु से अंतर के माप क्रमशः 3, $\frac{7}{5}$ हैं।



प्रत्येक परिमेय संख्या के साथ रेखा के बिन्दु का संबंध जोड़ लेने पर स्वाभाविक रूप से निम्नलिखित प्रश्न उठता है।

क्या इस प्रकार रेखा के सभी बिन्दु समाप्त हो जाएँगे, अर्थात् क्या इस प्रक्रिया द्वारा रेखा के प्रत्येक बिन्दु का किसी परिमेय संख्या के साथ संबंध जोड़ा जा सकेगा ?

इस प्रश्न का उत्तर बलात्मक 'न' है। इसका प्रतिपादन सर्वप्रथम पाइथागोरस ने लगभग 2500 वर्ष पूर्व किया था। उसने सिद्ध किया कि यदि रेखा पर कोई बिन्दु P ऐसा हो कि OP की लंबाई एकक लंबाई, OU_1 जितनी लंबी भुजा वाले वर्ग के विकर्ण की लंबाई के बराबर हो तो बिन्दु P के अनुरूप कोई परिमेय संख्या नहीं होगी।



नीचे यह सिद्ध किया जा रहा है।

यदि संभव हो तो मान लीजिए कि बिन्दु P के अनुरूप परिमेय संख्या $\frac{a}{b}$ है। तब

$$1^2 + 1^2 = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \Rightarrow a^2 = 2b^2.$$

हम धन-संख्याओं a, b का अभाज्यों के गुणनफलों के रूप में विचार करते हैं। a का प्रत्येक अभाज्य खंड a^2 के अभाज्य गुणनखंडन में दो बार आता है। साथ ही b का प्रत्येक अभाज्य खंड भी b^2 के अभाज्य गुणन खंडन में दो बार आता है।

इस प्रकार अभाज्य संख्या 2 समता के वाम पक्ष में या तो आती ही नहीं, या समसंख्या-बार आती है, किन्तु दक्षिण पक्ष में विषम संख्या-बार आती है। इस प्रकार एक मिथ्या कथन प्राप्त होता है।

अतः P एक ऐसा बिन्दु है जिसके अनुरुप कोई परिमेय संख्या नहीं होती।

लंबाइयों के अनुरेख माप

जहाँ धन-संख्याओं का समुच्चय किसी समूह की वस्तुओं को गिनने की आवश्यकता पूरी करता है वहाँ परिमेय संख्याओं का समुच्चय लंबाई, समय इत्यादि जैसी वस्तुओं को मापने की आवश्यकता में योग देता है। किन्तु यह कहना महत्वपूर्ण है कि परिमेय संख्याओं का समुच्चय सभीलंबाइयों को मापने के लिए पर्याप्त नहीं होता।

सभी लंबाइयों को मापने में समर्थ होने के लिए हमें परिमेय संख्याओं के समुच्चय का विस्तार वास्तविक संख्याओं के समुच्चय तक करना होगा। यह देखा जाएगा कि परिमेय संख्याओं का समुच्चय वास्तविक संख्याओं के समुच्चय का उप-समुच्चय है।

वास्तविक संख्याओं के समुच्चय का विकास और अध्ययन बीजगणित II में किया जाएगा।

40. संक्षेप

$$\mathbf{Q} = \{x, -x, 0 : x \in \mathbf{F}\}$$

$$\mathbf{F} = \left\{\frac{a}{b} : a \in \mathbf{N}, b \in \mathbf{N}\right\}$$

$$\mathbf{I} = \{n, -n, 0 : n \in \mathbf{N}\}$$

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{F} \subset \mathbf{Q}$$

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{I} \subset \mathbf{Q}.$$

$\mathbf{Q}$ परिमेय संख्याओं का समुच्चय, $\mathbf{F}$ भिन्नों का समुच्चय और $\mathbf{I}$ पूर्ण संख्याओं का समुच्चय है। $\mathbf{F}$ वास्तविक उप-समुच्चय है $\mathbf{Q}$ का और यह $\mathbf{Q}$ के धनात्मक अंगों का समुच्चय ही है।

$\mathbf{N}$ वास्तविक उप-समुच्चय है $\mathbf{I}$ और यह $\mathbf{I}$ के धनात्मक अंगों का समुच्चय ही है।

$\mathbf{Q}_0$ सभी अ-शून्य परिमेय संख्याओं का समुच्चय है।

$\mathbf{Q}$ में योग संयोजन

परिमेय संख्याओं के प्रत्येक युग्म x, y के अनुरूप एक ऐसी परिमेय संख्या होती है जिसे $x+y$ द्वारा सूचित करते हैं और उनका योगफल कहते हैं। परिमेय संख्याओं के प्रत्येक युग्म x, y के साथ परिमेय संख्या $x+y$ का संबंध जोड़ने की इस विधि को $\mathbf{Q}$ में योग-संयोजन कहते हैं। इसके निम्नलिखित चार नियम हैं।

1. योग-संयोजन की क्रम-विनिमेयता होती है, अर्थात्

$$x + y = y + x \;\forall\; x, y \in \mathbf{Q}.$$

2. योग-संयोजन की सहचारिता होती है, अर्थात्

$$(x + y) + z = x + (y + z), \forall\ x, y, z \in \mathbf{Q}.$$

3. योग-संयोजन का निष्प्रभाव अवयव, 0, होता है जिसके लिए

$$x + 0 = x \ \forall\ x \in \mathbf{Q}.$$

4. प्रत्येक परिमेय संख्या x के अनुरूप $-x$ द्वारा सूचित x का विपरीत अथवा ऋण कहलाने वाली एक ऐसी परिमेय संख्या होती है जिसके लिए

$$x + (-x) = 0, x \in \mathbf{Q}.$$

Q में गुणन-संयोजन

परिमेय संख्याओं के प्रत्येक युग्म x, y के अनुरूप एक ऐसी परिमेय संख्या होती है जिसे xy द्वारा सूचित करते हैं और उनका गुणनफल कहते हैं। परिमेय संख्याओं के प्रत्येक युग्म x, y के साथ परिमेय संख्या xy का संबंध जोड़ने की इस विधि को **Q** में गुणन-संयोजन कहते हैं। इसके निम्नलिखित चार नियम हैं।

5. गुणन-संयोजन की क्रम-विनिमेयता होती है, अर्थात्

$$xy = yx \ \forall\ x, y \in \mathbf{Q}.$$

6. गुणन-संयोजन की सहचारिता होती है, अर्थात्

$$(xy)\, z = x\, (yz) \ \forall\ x, y, z \in \mathbf{Q}.$$

7. गुणन-संयोजन का निष्प्रभाव अवयव 1 होता है जिसके लिए

$$x \times 1 = x \ \forall\ x \in \mathbf{Q}.$$

8. प्रत्येक अ-शून्य परिमेय संख्या x के अनुरूप $\frac{1}{x}$ द्वारा सूचित, x का व्युत्क्रम कहलाने वाली एक ऐसी परिमेय संख्या होती है जिसके लिए

$$x \times \frac{1}{x} = 1, x \in \mathbf{Q}_0.$$

योग और गुणन का संयुक्ततः एक नियम होता है, यथा

9. गुणनयोग को वितरित करता है, अर्थात्

$$x\,(y + z) = xy + xz \qquad \forall\ x, y, z \in \mathbf{Q}.$$

उपर्युक्त नौ नियमों वाले योग और गुणन संयोजनों से समृद्ध परिमेय संख्यओं के **समुच्चय Q** को कहते हैं।

परिमेय संख्याओं का फील्ड

परिमेय संख्याओं के फ़ील्ड के अतिरिक्त संख्याओं के दो और अत्यंत महत्वपूर्ण फील्ड होते हैं, यथा

(*i*) वास्तविक संख्याओं का फ़ील्ड, और

(*ii*) सम्मिश्र संख्याओं का फ़ील्ड।

इन दोनों फ़ील्डों का अध्ययन बीजगणित II में किया जाएगा।

यह ध्यान देना आवश्यक है कि धन-संख्याओं, भिन्नों और पूर्ण संख्याओं के समुच्चयों

N, F, I

में योग और गुणन के दोनों संयोजन होने पर भी ये फ़ील्ड नहीं हैं क्योंकि इन में से कोई भी फ़ील्ड के नौ नियमों का समाधान नहीं करता। यह देखना रोचक होगा कि इन तीन समुच्चयों **N, F, I** में इन नौ नियमों में कौन-कौन-से नहीं हैं।

यह सरलतापूर्वक देखा जा सकता है कि

(*i*) **N** नियम 3, 4, 8 का समाधान नहीं करता।
(*ii*) **F** नियम 3, 4 का समाधान नहीं करता।
(*iii*) **I** नियम 8 का समाधान नहीं करता।

व्यवकलन और विभाजन

Q में व्यवकलन और विभाजन संयोजनों की परिभाषाएँ निम्नलिखित हैं :

$$x - y = x + (-y) \qquad \forall\ x, y \in \mathbf{Q}$$

$$x \div y = x \times \left(\frac{1}{y}\right) \qquad \forall\ x, y \in \mathbf{Q}, y \neq 0.$$

टिप्पणी—पाठक **N, F, I** में व्यवकलन और विभाजन में से एक अथवा दोनों की विफलता समझने का प्रयत्न करे।

Q में 'अधिक है. . . से' क्रम-संबंध

Q में योग और गुणन के दो संयोजनों के साथ-साथ प्रतीक $>$ द्वारा सूचित 'अधिक है. . . से' संबंध भी होता है। इस संबंध के निम्नलिखित नियम हैं :

10. संबंध का त्रिविकल्प नियम होता है, अर्थात् किन्हीं दो परिमेयों x, y के लिए निम्नलिखित तीन विकल्पों में से एक और केवल एक ही होता है :

(*i*) $x > y$ (*ii*) $y > x$ (*iii*) $x = y$.

11. संबंध की संक्रात्मकता होती है, अर्थात्

$$x > y \ \text{ और } \ y > z \Rightarrow x > z,\ x, y, z \in \mathbf{Q}.$$

योग संयोजन और 'अधिक है. . . से' संबंध मिलकर निम्नलिखित नियम का समाधान करते हैं :

12. $x > y \Leftrightarrow x + z > y + z, \quad x, y, z \in \mathbf{Q}.$

गुणन संयोजन और 'अधिक है. .से' संबंध मिलकर निम्नलिखित नियम का समाधान करते हैं :

13. $x > y$ **और** $z > 0 \Leftrightarrow xz > yz,\ x, y, z \in \mathbf{Q}, z > 0.$

परिमेय संख्याओं का क्रमित फ़ील्ड

परिमेय संख्याओं के समुच्चय में फ़ील्ड के नौ नियमों के साथ 'अधिक है . . .से' क्रम-संबंध के चारों नियम भी होने के कारण परिमेय संख्याओं में फ़ील्ड को क्रमित-फ़ील्ड कहते हैं।

आगे चलकर यह देखा जाएगा कि वास्तविक संख्याओं का समुच्चय भी एक क्रमित-फ़ील्ड है।

परिमेय और वास्तविक संख्याओं के दोनों क्रमित-फ़ील्डों में उपर्युक्त तेरह नियम होते हैं, किन्तु ऐसे भी नियम हैं जो परिमेय संख्याओं के क्रमित-फ़ील्ड का वास्तविक संख्याओं के क्रमित-फ़ील्ड से भेद करते हैं।

सम्मिश्र संख्याओं का समुच्चय क्रमित-फ़ील्ड नहीं होता।

धनात्मक और ऋणात्मक परिमेय संख्याएँ

परिभाषा

$$x > 0 \Leftrightarrow x \text{ धनात्मक है।}$$
$$x > 0 \Leftrightarrow x \text{ ऋणात्मक है।}$$

परिमेय संख्या x के निरपेक्ष मान को $|x|$ द्वारा सूचित करते हैं।

अतः

$$|x| = \begin{cases} x & \text{यदि } x \text{ धनात्मक हो} \\ -x & \text{यदि } x \text{ ऋणात्मक हो} \\ x & \text{यदि } x \text{ शून्य हो।} \end{cases}$$

41. कुछ विशेष गुणनफल

द्विघात-समीकरणों के अध्ययन में महत्वपूर्ण सिद्ध होने वाले तीन विशेष गुणन-फल नीचे दिए जा रहे हैं।

यह देखा जाएगा कि अन्य प्रकरणों की भाँति नीचे भी हम परिमेय संख्याओं के समुच्चय **Q** में योग और गुणन संयोजनों के विभिन्न मूल नियमों का उपयोग करते हैं।

हम सिद्ध करेंगे कि

(i) $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

(ii) $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$

(iii) $(x + y\ (x - y) = x^2 - y^2.$

उपपत्ति

(i)
$$\begin{aligned} (x + y)\,(x + y) &= (x + y)\,x + (x + y)\,y \\ &= x\,(x + y) + y\,(x + y) \\ &= (xx + xy) + (yx + yy) \\ &= (x^2 + xy) + (xy + y^2) \\ &= x^2 + [xy + (xy + y^2)] \\ &= x^2 + [(xy + xy) + y^2] \\ &= x^2 + [1\cdot(xy) + 1\cdot(xy) + y^2] \\ &= x^2 + [(1 + 1)\,xy + y^2] \\ &= x^2 + [2xy + y^2] \\ &= x^2 + 2xy + y^2. \end{aligned}$$

पाठक को चाहिए कि वह **Q** के मूल नियमों के आधार पर प्रत्येक चरण का समर्थन करे। ऊपर हमने प्रत्येक चरण को लिखने और प्रत्येक चरण में केवल एक मूल नियम का प्रयोग करने का प्रयत्न किया है, किन्तु कुछ अभ्यास के पश्चात् पाठक को कुछ चरणों को लांघ जाने और प्रक्रिया को अधिकांश मन ही मन करने में समर्थ हो जाना चाहिए।

(*ii*) $\forall\ x, y \in \mathbf{Q}$.

$$\begin{aligned}(x-y)^2 &= (x-y)\,(x-y)\\ &= (x-y)\,(x-(x-y)\,y\\ &= (x^2-yx)-(xy-y^2)\\ &= x^2-xy-xy+y^2\\ &= x^2-2xy+y^2.\end{aligned}$$

एक अन्य रीति

$$\begin{aligned}[x+(-y)]^2 &= x^2+2x\,(-y)+(-y)^2\\ &= x^2-2xy+y^2\end{aligned}$$

(*iii*)
$$\begin{aligned}(x+y)\,(x-y) &= (x+y)\,x-(x+y)\,y\\ &= (x^2+yx)-(xy+y^2)\\ &= x^2+yx-xy-y^2\\ &= x^2-y^2.\end{aligned}$$

प्रश्नावली

1. निम्नलिखित को सिद्ध कीजिए। वर्ण किन्हीं परिमेय संख्याओं के सूचक हैं।

(*i*) $(x+3y)^2 = x^2+6xy+9y^2$

(*ii*) $(7x-5y)^2 = 49x^2-70xy+25y^2$

(*iii*) $\left\{\frac{3}{2}x-\frac{7}{5}y\right\}^2 = \frac{9}{4}x^2-\frac{21}{5}xy+\frac{49}{25}y^2$

(*iv*) $(\cdot 5x-1\cdot 3y)^2 = \cdot 25x^2-1\cdot 3xy+1\cdot 69y^2$

(*v*) $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

(*vi*) $(a+b-c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab-2ac-2bc$

(*vii*) $(a-b-c)^2 = a^2+b^2+c^2-2ab-2ac-2bc$

(*viii*) $(2x-3y)\,(2x+3y) = 4x^2-9y^2$

(*ix*) $(a^2b-ab^2)\,(a^2b+ab^2) = a^2b^2\,(a^2-b^2)$

(*x*) $(x-y+3)\,(x+y-3) = x^2-y^2+6y-9$

(*xi*) $(a-3b+4c)\,(a+3b+4c) = a^2-9b^2+16c^2+8ac$

(*xii*) $(2x+y-z)\,(2x+y+z) = 4x^2+y^2-z^2+4xy$

(*xiii*) $(3a+7b-\frac{1}{2}c)\,(3a-7b-\frac{1}{2}c) = 9a^2-49b^2+\frac{1}{4}c^2-3ac.$

2. अ-शून्य परिमेय संख्याओं x और y के लिए सिद्ध कीजिए कि

(*i*) $\left[x+\frac{1}{x}\right]^2 = x^2+\frac{1}{x^2}+2$

(*ii*) $\left[x-\frac{1}{x}\right]^2 = x^2+\frac{1}{x^2}-2$

(*iii*) $\left[x+\frac{1}{x}\right]\left[x-\frac{1}{x}\right] = x^2-\frac{1}{x^2}$

(iv) $\left[x + \frac{1}{x}\right]\left[y + \frac{1}{y}\right] = xy + \frac{1}{xy} + \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$

(v) $\left[x + \frac{1}{x}\right]\left[y - \frac{1}{y}\right] = xy - \frac{1}{xy} + \left[\frac{y}{x} - \frac{x}{y}\right]$

(vi) $\left[x - \frac{1}{x}\right]\left[y - \frac{1}{y}\right] = xy + \frac{1}{xy} - \left[\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right]$.

3. निम्नलिखित को सरल कीजिए। साथ ही x, y, z, a, b, c के ऐसे मूल्य दीजिए जिनके लिए व्यंजक सार्थक नहीं हैं।

(i) $(-7a^2b)(3cba^2)$

(ii) $(-7x^3zy)\left[-\frac{1}{4}xyz^2\right]$

(iii) $\dfrac{\frac{1}{x} - \frac{1}{y}}{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}}$

(iv) $\dfrac{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}}$

(v) $\dfrac{2x + 3y}{\frac{2}{3y} + \frac{1}{x}}$

(vi) $\dfrac{(b + c)^2}{6bx} \cdot \dfrac{2bx}{(b + c^3)}$

(vii) $\dfrac{16x^2y^2}{3az^3} \cdot \dfrac{25z^2}{32xy^3} \cdot \dfrac{9xy}{5z}$

(viii) $\dfrac{(y + 2x)^2}{ay - cy} \div \dfrac{y^2 + 2xy}{y^2a - y^2c}$

(ix) $\left[\dfrac{64a^2 - b^2}{x^2 - 4} \cdot \dfrac{(x - 2)^2}{16a + 2b}\right] \div \dfrac{x^2 - 4}{(x + 2)^2}$

(x) $\dfrac{4x^2 + 10}{x - 3} \div \dfrac{6x^2 + 15}{x^2 - 9}$

(xi) $\dfrac{(x - y)^2}{x^2 - y^2}$

(xii) $\dfrac{a^3 - ab^2}{ab(a - b)^2}$

(xiii) $\dfrac{a^2 - 2ab + b^2}{a^2 - b^2}$

(xiv) $\dfrac{y}{y - 2} + \dfrac{2}{y + 2}$

(xv) $\dfrac{1}{3x + 4} + \dfrac{1}{3x - 4}$

(xvi) $\dfrac{1}{7y - 5} - \dfrac{1}{7y + 5}$

(xvii) $\dfrac{a + b}{3ab} - \dfrac{2a + 3}{6a^2}$

(xviii) $\dfrac{x + 1}{x - 1} - \dfrac{1 - 3x^2}{1 - x^2}$

(xix) $\dfrac{x + 3y}{x + 2y} - \dfrac{x + 2y}{x + 3y}$

(xx) $\dfrac{x + 2}{x + 3} + \dfrac{x + 3}{x + 2}$.

उदाहरण

1. $5x - 3(x - 2) = 3x - 2(x - 1),\ x \in \mathbf{Q}$.

को हल कीजिए।

अब

$$5x - 3(x - 2) = 3x - 2(x - 1)$$

$$\Leftrightarrow \quad 5x - 3x + 6 = 3x - 2x + 2$$
$$\Leftrightarrow \quad 2x + 6 = x + 2$$
$$\Leftrightarrow \quad 2x + 6 - 6 = x + 2 - 6$$
$$\Leftrightarrow \quad 2x = x - 4$$
$$\Leftrightarrow \quad 2x - x = x - 4 - x$$
$$\Leftrightarrow \quad x = -4.$$

अतः अपेक्षित सत्य-समुच्चय

$$\{-4\}.$$

है ।

2. $\frac{7x-1}{4} - \frac{1}{2}\left[2x - \frac{1-x}{2}\right] = 6\frac{1}{3}, \qquad x \in \mathbf{Q}.$

को हल कीजिए ।

अब

$$\frac{7x-1}{4} - \frac{1}{2}\left[2x - \frac{1-x}{2}\right] = \frac{19}{3}$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{7x-1}{4} - x + \frac{1-x}{4} = \frac{19}{3}$$
$$\Leftrightarrow \quad 12\left[\frac{7x-1}{4} - x + \frac{1-x}{4}\right] = 12 \times \frac{19}{3}$$
$$\Leftrightarrow \quad 3(7x-1) - 12x + 3(1-x) = 76$$
$$\Leftarrow \quad 21x - 3 - 12x + 3 - 3x = 76$$
$$\Leftarrow \quad (21 - 12 - 3)x - 3 + 3 = 76$$
$$\Leftrightarrow \quad 6x = 76$$
$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{76}{6} = \frac{38}{3}.$$

परिणामतः दिए हुए समीकरण का हल $\frac{38}{3}$ है ।

3. $\frac{12x+1}{4} + (1 + 2x) > \frac{15x+4}{3} + x, \quad x \in \mathbf{Q}.$

का सत्य-समुच्चय निकालिए ।

अब

$$\frac{12x+1}{3} + (1 + 2x) > \frac{15x+4}{3} + x$$
$$\Leftrightarrow \quad 3\left[\frac{12x+1}{3} + (1+2x)\right] > 3\left[\frac{15x+4}{3} + x\right]$$
$$\Leftrightarrow \quad 12x + 1 + 3(1 + 2x) > 15x + 4 + 3x$$
$$\Leftrightarrow \quad 18x + 4 > 18x + 4$$

$$\Leftrightarrow \qquad 18x > 18x$$
$$\Leftrightarrow \qquad x > x.$$

किन्तु $x > x$ मिथ्या है क्योंकि ऐसी कोई परिमेय संख्या नहीं होती जो स्वयं अपने से अधिक हो।

अतः सत्य-समुच्चय रिक्त है, अर्थात् सत्य-समुच्चय ϕ है।

4. $\dfrac{4x-9}{5} + \dfrac{6x-3}{7} - \dfrac{10x+3}{2} > 0,\ x \in \mathbf{Q}.$

का सत्य समुच्चय निकालिए।

अब

$$\frac{4x-9}{5} + \frac{6x-3}{7} - \frac{10x+3}{2} > 0$$
$$\Leftrightarrow 70\left[\frac{4x-9}{5} + \frac{6x-3}{7} + \frac{10x+3}{2}\right] > 0 \cdot 70 = 0$$
$$\Leftrightarrow 14\,(4x-9) + 10\,(6x-3) - 35\,(10x+3) > 0$$
$$\Leftrightarrow 56x - 126 + 60x - 30 - 350x - 105 > 0$$
$$\Leftrightarrow (116 - 350)\,x - (126 + 30 + 105) > 0$$
$$\Leftrightarrow -234x - 261 > 0$$
$$\Leftrightarrow -234x - 261 + 261 > 261$$
$$\Leftrightarrow -234x > 261$$
$$\Leftrightarrow \left[-\frac{1}{234}\right](-234)x < \left(-\frac{1}{234}\right)(261)$$
$$\Leftrightarrow x < -\frac{261}{234}.$$

अतः सत्य-समुच्चय

$$\left\{x : x < -\frac{261}{234},\ x \in \mathbf{Q}\right\}.$$

है।

प्रश्नावली

1. $x \in \mathbf{Q}$ होने पर निम्नलिखित के सत्य-समुच्चय निकालिए :

(i) $4x + 5 = 3x - 9$

(ii) $27x + 41 = 29x - 34$

(iii) $\dfrac{2x}{3} + \dfrac{3}{7}x - \dfrac{x}{5} = 6$

(iv) $2 \cdot 3x + \dfrac{3}{7} = \cdot 7x - \dfrac{3}{16}$

(v) $\dfrac{x+10}{2} + \dfrac{15-5x}{3} = \dfrac{3\,(x+2)}{5}$

(vi) $\frac{2 - 3x}{3} + \frac{1 + 5x}{5} = \frac{3 - 8x}{4}$

(vii) $\frac{x + 4}{7} = \frac{12x}{11} - (3x - 5)$

(viii) $\frac{5x}{2} - \frac{7}{11} = \frac{7}{11} - \frac{4x}{3}$

(ix) $\frac{3x}{2} + \frac{8 - 4x}{7} = 3$

(x) $\frac{3}{4}(2x - 5) - \frac{5}{8}(3x + 1) = 1$

(xi) $\frac{3x + 5}{2} = 4x + 2 - \frac{9x - 4}{6}$

(xii) $1{\cdot}5\,(x - 5) - {\cdot}2\,(4x - 3) + 9 = 0$

(xiii) $\frac{1 - 6x}{10} - \frac{2x + 3}{6} - \frac{13 + 6x}{4} = 0$

(xiv) $\frac{2(x - 3)}{7} - \frac{2 - x}{3} = \frac{9x - 6}{63}$

(xv) $\frac{4x - 1}{6} - \frac{2x + 3}{9} = \frac{8x - 9}{18}$.

2. यदि $x \in \mathbf{Q}$ तो निम्नलिखित के सत्य समुच्चय निकालिए :

(i) $8x + 25 > 7x + 13$

(ii) $13x + 16 < 7x + 4$

(iii) $\frac{3}{4}x - \frac{4}{13} > \frac{5}{6}x + \frac{2}{11}$

(iv) ${\cdot}3x - {\cdot}75 > 1{\cdot}25 - {\cdot}7x$

(v) $\frac{3x}{5} - \frac{7x}{10} + \frac{3x}{4} \leqslant \frac{7x}{8} - 15$

(vi) $\frac{3x - 2}{3} - \frac{8x - 3}{4} \geqslant \frac{5x - 1}{5}$

(vii) $\frac{4x + 7 - (x - 6)}{3} + \frac{5x - 3}{3} \geqslant 0$

(viii) $\frac{x + 3}{2} + \frac{8 - 4x}{7} \leqslant 0$

(ix) $\frac{2x + 5}{4} - 2x \leqslant \frac{10x + 13}{8} + 1$

(x) $\frac{x - 2}{4} + \frac{5}{6} \leqslant x - \frac{2x - 1}{3} + \frac{1}{2}$

3. कथनों को निरर्थक बनाने वाली परिमेय संख्याओं से विभिन्न x को कोई परिमेय संख्या मान कर निम्नलिखित को हल कीजिए :

(i) $\frac{2}{3x} - \frac{1}{x} = \frac{5}{9}$ (ii) $\frac{3}{x+5} = \frac{1}{x-5}$

(iii) $\frac{14}{x-3} = \frac{12}{x+4}$ (iv) $\frac{3}{4x} - \frac{2}{x} = \frac{4}{1-3x}$

(v) $\frac{4}{x-3} + \frac{3}{x+4} = 0.$

उदाहरण

1. निम्नलिखित समुच्चयों को सूचीबद्ध कीजिए ।

(i) $\{ x : | x | = 1, x \in \mathbf{Q}\}$

(ii) $\{ x : | 2x - 1 | = 5, x \in \mathbf{Q} \}$.

हल (i)—दो परिमेय संख्याएँ 1 और -1 ऐसी हैं जिनका निरपेक्ष मान 1 है और इनके अतिरिक्त कोई परिमेय संख्या ऐसी नहीं जिसका निरपेक्ष मान 1 हो। इस प्रकार परिणामस्वरूप

$$\{ x : | x | = 1, x \in \mathbf{Q} \} = \{1, -1\}.$$

(ii) दो परिमेय संख्याएँ 5 और -5 ऐसी हैं जिनका निरपेक्ष मान 5 है और इनके अतिरिक्त कोई परिमेय संख्या ऐसी नहीं जिसका निरपेक्ष मान 5 हो। परिणामस्वरूप

$$| 2x - 1 | = 5,$$

तब और तभी जब

$$2x - 1 = 5 \text{ या } 2x - 1 = -5.$$

अब

$$2x - 1 = 5 \Leftrightarrow x = -3$$

और

$$2x - 1 = -5 \Leftrightarrow x = -2$$

$$\therefore \quad \{ x : | 2x - 1 | = 5, x \in \mathbf{Q} \} = \{3, -2\}.$$

2. निम्नलिखित समुच्चयों को सूचीबद्ध कीजिए ।

(i) $\{x : | x^2 - 5 | = 4, x \in \mathbf{Q} \}$

(ii) $\{x : | x^2 - 1 | = 1, x \in \mathbf{Q} \}$

हल (i)—उपर्युक्त उदाहरण के वर्ग (ii) के समान, यहाँ

$| x^2 - 5 | = 4$ तब और तभी जब

$$x^2 - 5 = 4 \quad \text{या } x^2 - 5 = -4.$$

अब

$$x^2 - 5 = 4 \Leftrightarrow x^2 = 9$$

$$\Leftrightarrow x = 3 \text{ या } x = -3$$

और

$$x^2 - 5 = -4 \Leftrightarrow x^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \text{ या } x = -1.$$

अत:

$$\{x : | x^2 - 5 | \quad 4, x \in \mathbf{Q}\} = \{3, -3, 1, -1\}.$$

पाठक यह सत्यापित करे कि समुच्चय

$$\{3, -3, 1, -1\}$$

के सभी अंग

$$| x^2 - 5 | = 4.$$

का समाधान करते हैं।

(*ii*) पुन: $| x^2 - 1 | = 1$, तब और तभी जब

$$x^2 - 1 = 1 \text{ या } x^2 - 1 = -1.$$

अब

$$x^2 - 1 = 1 \Leftrightarrow x^2 = 2$$

और $\mathbf{Q}$ में $x^2 = 2$ का समाधान समुच्चय रिक्त है।

पुन:

$$x^2 - 1 = -1 \Leftrightarrow x^2 = 0$$

और $\mathbf{Q}$ में $x^2 = 0$ का समाधान समच्चय $\{0\}$ है।

अत:

$$\{x : | x^2 - 1 | = 1, x \in \mathbf{Q}\} = \{0\}.$$

3. निम्नलिखित समुच्चयों का वर्णन कीजिए :

(*i*) $\{x : | x | < 1, \in \mathbf{Q}\}$

(*ii*) $\{x : | 2x + 3 | < 2, x \in \mathbf{Q}\}$

(*iii*) $\{x : | 2x + 3 | < 2, x \in \mathbf{Q}\}$.

हल (*i*) x के + आत्मक या शून्य होने पर, $| x | = x$

और x के —आत्मक होने पर $| x | = -x$

अब मान लीजिए कि x शून्य अथवा + आत्मक है, तब

$| x | < 1$ का तुल्य रूप है $x < 1$. ..(*a*)

पुन: x के —आत्मक होने पर

$| x | < 1$ का तुल्य रूप है $-x < 1$

जो पुन: तुल्य है $x > -1$ ..(*b*)

(*a*) और (*b*) को मिलाने पर

$$| x | < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1.$$

(*ii*) वर्ग (*i*) के ठीक समान यहाँ

$$|2x+3| < 2 \Leftrightarrow -2 < 2x+3 < 2.$$

अब

$$-2 < 2x+3 \Leftrightarrow -\frac{5}{2} < x \qquad ...(c)$$

और

$$2x+3 < 2 \Leftrightarrow x < -\frac{1}{2}. \qquad (d)$$

(*c*) और (*d*) को मिलाने पर

$$|2x+3| < 2 \Leftrightarrow -\frac{5}{2} < x < -\frac{1}{2}.$$

अतः

$$\{x : |2x+3| < 2, x \in \mathbf{Q}\} = \{x : -\frac{5}{2} < x < -\frac{1}{2}, x \in \mathbf{Q}\}.$$

(*iii*) यदि $(2x+3)$ अ-ऋणात्मक हो तो

$$|2x+3| = 2x+3$$

और इस प्रकार ऐसी स्थिति में

$$|2x+3| > 2 \Leftrightarrow 2x+3 > 2$$
$$\Leftrightarrow x > -\frac{1}{2}.$$

पुनः यदि $2x+3$ ऋणात्मक हो तो

$$|2x+3| = -(2x+3)$$

और तब

$$|2x+3| > 2 \Leftrightarrow -2(x+3) > 2$$
$$\Leftrightarrow 2x < -5$$

अतः

$$\Leftrightarrow x < -\frac{5}{2}.$$

$$\{x : |2x+3| > 2, x \in \mathbf{Q}\} = \left\{x : x > -\frac{1}{2}, x \in \mathbf{Q}\right\} \cup \left\{x : x > -\frac{5}{2}, x \in \mathbf{Q}\right\}$$

प्रश्नावली

1. निम्नलिखित समुच्चयों को सूची बद्ध कीजिए :

(*i*) $\{x : |x| = 2, x \in \mathbf{Q}\}$ (*ii*) $\left\{x : |x| = \frac{5}{7}, x \in \mathbf{Q}\right\}$

(*iii*) $\{x : |x-3| = 5, x \in \mathbf{Q}\}$ (*iv*) $\{x : |x-7| = 4, x \in \mathbf{Q}\}$

(v) $\{x : | 7x - 4 | = 1, \ x \in \mathbf{Q}\}$

(vi) $\left\{ x : | \frac{2}{3} \ x + 5 | - \frac{3}{4}, x \in \mathbf{Q} \right\}$

(vii) $\{x : | x + 7 | = 3, x \in \mathbf{Q}\}$

(viii) $\{x : | \cdot 5x - 2\cdot 3 | = 1\cdot 7, x \in \mathbf{Q}\}$

(ix) $\{x : | x - 5 | = 0 \ x, \in \mathbf{Q}\}$

(x) $\{x : | 2x + 5 | = -3, x \in \mathbf{Q}\}$.

2. निम्नलिखित समुच्चयों को सूचीबद्ध कीजिए :

(i) $\{x : | x^2 - 3 \ | = 13, x \in \mathbf{Q}\}$ (ii) $\{x : | x^2 - 7 | = 7, x \in \mathbf{Q}\}$

(iii) $\{x : | x^2 - 8 | = 8, x \in \mathbf{Q}\}$ (iv) $\{x : | x^2 - 4 | = 2, x \in \mathbf{Q}\}$.

3. निम्नलिखित समुच्चयों का वर्णन कीजिए :

(i) $\{x : | x | < 5, x \in \mathbf{Q}\}$ (ii) $\{x : | 3x + 4 | < 5, x \in \mathbf{Q}\}$

(iii) $\{x : | 7x - 8 | < 17, x \in \mathbf{Q}\}$ (iv) $\{x : | x | > 2, x \in \mathbf{Q}\}$

(v) $\{v : | x - 7 | < 3, x \in \mathbf{Q}\}$ (vi) $\{x : | x - 9 | > 4 \ x \in \mathbf{Q}\}$

(vii) $\{x : | 3x - 3 | > 12, x \in \mathbf{Q}\}$

(viii) $\left\{ x : | \frac{1}{2} x + \frac{3}{5} | < \frac{1}{7}, x \in \mathbf{Q} \right\}$

(ix) $\{x : | 5x + 4 | < 0, x \in \mathbf{Q})$ (x) $\{x : | 2x - 5 | > 0, \ x \in \mathbf{Q}\}$.

सिंहावलोकन प्रश्नावली

1. यदि

$$A = \left\{ -\frac{5}{7}, -\cdot 7, 1.4, -3\cdot 75, 0, -\frac{21}{6}, 2\cdot 4 \right\}$$

और

$$B = \left\{ \frac{2}{3}, \frac{7}{11}, -\frac{13}{4}, -\frac{2}{3}, -\cdot 7, -3\cdot 75 - \frac{4}{15}, 2\cdot 16 \right\}$$

तो निम्नलिखित समुच्चयों के अधिकतम और न्यूनतम अंग निकालिए ।

$$A, B, A \cup B, A \cap B.$$

2. निम्नलिखित समुच्चयों के, यदि संभव हो तो अधिकतम और न्यूनतम अंग लिखिए ।

$$A = \{x : -5 \leqslant x < -3, x \in \mathbf{Q}\}$$
$$B = \{x : -5 < x \leqslant -3, x \in \mathbf{Q}\}$$
$$C = \{x : -5 \leqslant x \leqslant -3, x \in \mathbf{Q}\}$$
$$D = \{x : -5 < x < -3, x \in \mathbf{Q}\}$$
$$E = \{ x : -1 < x \leqslant 0, x \in \mathbf{Q}\}$$
$$F = \{ x : -1 < x < 0, x, \in \mathbf{Q}\}$$
$$G = \{x : -1 \leqslant x \leqslant 0, x \in \mathbf{Q}\}$$
$$H = \{x : -1 \leqslant x < 0, x \in \mathbf{Q}\}$$

3. सिद्ध कीजिए कि $x > y \Rightarrow -7 - 5y > -7 - 5x \ \forall \ x, y \in \mathbf{Q}_0$.

4. सिद्ध कीजिए कि $x > y \Rightarrow \frac{1}{y} > \frac{1}{x} \forall +$ आत्मक $x, y \in \mathbf{Q}$.

5. सिद्ध कीजिए कि $x > y \Rightarrow x^2 < y^2 \forall +$ आत्मक $x, y \in \mathbf{Q}$.

6. सिद्ध कीजिए कि $x > y \Rightarrow x^2 < y^2 \forall -$ आत्मक $x, y, \in \mathbf{Q}$.

7. सिद्ध कीजिए कि $x^2 - 1 > 0 \forall x > 1$ और $\forall x < -1, x \in \mathbf{Q}$.

8. सिद्ध कीजिए कि $x^2 - 1 < 0 \forall -1 < x < 1, x \in \mathbf{Q}$.

9. यदि $x, y, a, b \in \mathbf{Q}$ और व्यंजक सार्थक हों तो निम्नलिखित को सरल कीजिए :

(i) $\frac{2}{4 - x^2} \cdot \frac{2 - x}{2}$ (ii) $\frac{2x+2y}{5} \cdot \frac{15}{\frac{3}{4}x + \cdot 75y}$

(iii) $\frac{3a + 2b}{a - b} \cdot \frac{3a - 2b}{a + b}$ (iv) $\frac{4 - a^2}{7a - 14} \cdot \frac{8}{a + 2}$

(v) $\frac{x^2 + xy}{y - x} \div \frac{x+y}{x^2 - xy}$.

10. यदि $x \in \mathbf{Q}$ तो निम्नलिखित समीकरणों को हल कीजिए :

(i) $8x + \frac{3}{2} = 9x + \frac{5}{4}$ (ii) $\frac{6x}{13} + 9 = \frac{x}{12} - \frac{3}{4}$

(iii) $\frac{23x}{27} - \frac{13}{9} = \frac{13}{9} - \frac{4}{5}x$ (iv) $\frac{7x - 1}{7} + \frac{4x - 3}{4} = \frac{10x - 7}{5}$

(v) $\frac{x + 4}{9} = \frac{2x}{5} - (3x + 2)$

(vi) $\frac{3}{11}(3x + 8) = \frac{7}{8}(6x + 15)$

(vii) $\frac{10x + 7}{4} + \frac{9 - 2x}{5} + \frac{x - 8}{7} = 0$

(viii) $\frac{2}{x - 7} + \frac{3}{x + 7} = 0.$ (ix) $\frac{2}{3x + 4} - \frac{5}{4x - 7} = 0$

(x) $\frac{x - 1}{x - 2} - \frac{x - 3}{x - 3} = 0$ (xi) $\frac{x - a}{x - b} - \frac{x - c}{x - d} = 0$

(xii) $\frac{x + a}{x + b} - \frac{x + c}{a + d} = 0.$

टिप्पणी : (*viii*)—(*xii*) में बीजीय व्यंजकों को सार्थक माना गया है।

11. यदि $x \in \mathbf{Q}$ तो निम्नलिखित के सत्य समुच्चय निकालिए :

(i) $17x - 15 > 19x - 15$ (ii) $\frac{5}{7}x - \frac{2}{3} > \frac{7}{9} - \frac{2}{21}x$

(iii) $\frac{9x + 5}{5} - \frac{x - 4}{3} \geqslant 0$ (iv) $\frac{3x + 4}{5} - 3x \leqslant \frac{8x + 15}{6} + 1$

(v) $|2x - 9| = 4$ (vi) $|3x + 4| = 7$

(*vii*) $| x^2 - 13 | = 12$ (*viii*) $| x^2 - 18 | = 18$

(*ix*) $| x^2 - 3 | = 4$ (*x*) $| x^2 - 4 | = 3$

(*xi*) $\left| 5x - \frac{2}{3} \right| < 4$ (*xii*) $\left| 3x - \frac{2}{5} \right| > \frac{3}{4}$

(*xiii*) $\left| 2x + \frac{3}{5} \right| < 7$ (*xiv*) $\left| 4x + \frac{3}{7} \right| > \frac{1}{2}$

(*xv*) $(x - 2)(x - 3) > 0$ (*xvi*) $(x - 2)(x - 3) < 0$

(*xvii*) $(x - 2)(x - 3) = 0$ (*xviii*) $x(x - 1) > 0$

(*xix*) $x(x - 1) < 0$ (*xx*) $x(x - 1) = 0$.

12. परिमेय संख्याओं के समुच्चय **Q** के तेरह क्रमित फील्ड नियमों और संक्षेप में दी गई धनात्मक तथा ऋणात्मक परिमेय संख्याओं की परिभाषा के आधार पर ही निम्नलिखित परिणाम प्राप्त कीजिए।

(*i*) दो धनात्मक परिमेय संख्याओं का योगफल धनात्मक है।

[**उद्देशक**— $x > 0$ और $y > 0 \Rightarrow x + y > 0 + 0 = 0$].

(*ii*) दो ऋणात्मक परिमेय संख्याओं का योगफल ऋणात्मक है।

(*iii*) $x > y \Leftrightarrow x - y$ धनात्मक है।

[**उद्देशक** $x > y \Leftrightarrow x + (-y) > y + (-y)$]

(*iv*) $x < y \Leftrightarrow x - y$ ऋणात्मक है।

(*v*) कोई परिमेय संख्या x, अपने विपरीत $-x$ के ऋणात्मक अथवा धनात्मक होने के अनुसार धनात्मक अथवा ऋणात्मक होती है।

[**उद्देशक**— $x > 0 \Leftrightarrow x + (-x) > 0 + (-x) \Leftrightarrow 0 > 0 - x = -x.$]

(*vi*) $0.x = 0 \ \forall \ x \in \mathbf{Q}$.

[**उद्देशक**—$x(0 + 0) = x.0 + x.0$[

$\Rightarrow x.0 = x.0 + x.0$

$\Rightarrow \quad x.0 + [-(x.0)] = [x.0 + x0] + [-(x.0)]$

(*vii*) $xy = 0 \Leftrightarrow x = 0$ या $y = 0$ या x, y दोनों 0 हैं।

(*viii*) $\left. \begin{array}{r} x(-y) = -(xy) \\ (-x)(-y) = xy \end{array} \right\} \forall \ x, y \in \mathbf{Q}$.

[**उद्देशक**—वितरण नियम का उपयोग कीजिए।]

(*ix*) दो धनात्मक संख्याओं का और दो ऋणात्मक संख्याओं का गुणनफल धनात्मक होता है।

(*x*) एक संख्या के धनात्मक और दूसरी के ऋणात्मक होने पर उनका गुणनफल ऋणात्मक होता है।

(xi) $\left.\begin{array}{l} |x| \geqslant x \\ |x| \geqslant -x \end{array}\right\} \forall\ x \in \mathbf{Q}.$

(xii) $-|x| \leqslant x \leqslant |x|\ \forall\ x \in \mathbf{Q}.$

(xiii) $|x|$ दो संख्याओं $x, -x$ में अधिक है।

(xiv) $|x+y| \leqslant |x| + |y|\ \forall\ x, y \in \mathbf{Q}.$

[उद्देशक — $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$ और $-|y| \leqslant y \leqslant |y|$
$\Rightarrow -(|x| + |y|) \leqslant x + y \leqslant |x| + |y|$.]

(xv) $|xy| = |x|\ |y|\ \forall\ x, y \in \mathbf{Q}.$

(xvi) $|x-a| < b \Leftrightarrow a - b < x < a+b.$

(xvii) $-(x+y) = -x - y\ \forall\ x, y \in \mathbf{Q}$

(xviii) $\dfrac{1}{xy} = \dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{1}{y}\ \forall\ x, y \in \mathbf{Q}_0.$

5

रैखिक समीकरण : एकल और निकाय

42. भूमिका

अध्याय 4 में हमने परिमेय संख्याओं के निकाय का क्रमिकत फील्ड के रूप में विकास किया है। परिमेय संख्याओं के निकाय के प्रसंग में, अब, हम एकल रैखिक समीकरण और रैखिक समीकरण-निकायों का अध्ययन करेंगे। पाठक को याद होगा कि अध्याय 3 में एकचर वाले रैखिक समीकरणों से उसका संबंध रह चुका है। अब वह रैखिक समीकरणों के हल करने में धन-संख्याओं और भिन्नों के समुच्चयों की कमियों को दूर करने में परिमेय संख्याओं के समुच्चय की शक्ति को पहचानेगा। व्यापक अध्ययन तो केवल दो चरों वाले निकायों तक ही सीमित रखा गया है किन्तु तीन चरों वाले समीकरणों का अध्ययन विशेष उदाहरणों द्वारा किया गया है।

रैखिक समीकरणों की संगति की समस्या का भी विस्तार पूर्वक विचार किया गया है और पाठक को इसके द्वारा साधारणतया विलोपन कहलाने वाली प्रक्रिया से परिचित कराया जाएगा।

समताओं या असमताओं के खुले कथनों के प्रसंग में, चर को बहुधा अज्ञात भी कहा जाता है।

43 परिमेय संख्याओं के फ़ील्ड में एकचरीय रैखिक समीकरण

परिमेय संख्याओं के फील्ड में एक अज्ञात x वाले समीकरण को तब रैखिक कहते हैं जब वह

$$ax + b = 0 \qquad \ldots(1)$$

जैसे समीकरण के तुल्य हो। यहाँ a और b परिमेय संख्याएँ हैं, $a \neq 0$. संख्या a को b का गुणांक और b को समीकरण (1) का अचर पद कहते हैं। जैसे

$$3x + \frac{5}{2} = 0$$

एक रैखिक समीकरण है जिसमें x की गुणांक संख्या 3 है और अचर पद $\frac{5}{2}$ है। समीकरण (1) को x वाले रैखिक समीकरण का मानक रूप कहते हैं।

उदाहरण 1. सिद्ध कीजिए कि

$$3x + 7 = \frac{2}{5}x + \frac{3}{2}$$

एक रैखिक समीकरण है।

अब

$$3x + 7 = \frac{2}{5}x + \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow 3x + 7 - \left[\frac{2}{5}x + \frac{3}{2}\right] = \left[\frac{2}{5}x + \frac{3}{2}\right] - \left[\frac{2}{5}x + \frac{3}{2}\right]$$

$$\Leftrightarrow \left[3 - \frac{2}{5}\right]x + \left[7 - \frac{3}{2}\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \qquad \frac{13}{5}x + \frac{11}{2} = 0$$

अतः समीकरण

$$\frac{13}{5}x + \frac{11}{2} = 0.$$

के तुल्य होने के कारण दत्त समीकरण एक रैखिक समीकरण है।

2. समीकरण

$$\frac{3}{x-2} + \frac{4}{3} = 0.$$

को लीजिए।

निस्संदेह $\frac{3}{x-2}$ के सार्थक होने के लिए चर x के प्रभाव-क्षेत्र में संख्या 2 नहीं होनी चाहिए। अतः x का प्रभाव-क्षेत्र संख्या 2 से रहित परिमेय संख्याओं का समुच्चय है।

अब

$$\frac{3}{x-2} + \frac{4}{3} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left\{\frac{3}{x-2} + \frac{4}{3}\right\} = 0, \ (x - 2 \text{ में } 0 \text{ न होने से})$$

$$\Leftrightarrow \qquad 3 + \frac{4}{3}(x-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \qquad 3 + \frac{4}{3}x - \frac{8}{3} = 0$$

$$\Leftrightarrow \qquad \frac{4}{3}x + \frac{1}{3} = 0$$

अतः दत्त समीकरण रैखिक है।

हम दोहराते हैं कि

(*i*) दोनों पक्षों में एक ही परिमेय संख्या जोड़ने पर,

(*ii*) दोनों पक्षों को एक ही अ-शून्य परिमेय संख्या से गुणा करने पर,

प्राप्त समीकरण भी दत्त समीकरण के तुल्य ही होता है।

हम देखते हैं कि ऊपर के दो उदाहरणों में मुख्य चरण क्रमशः निम्नलिखित हैं :

(*i*) दोनों पक्षों में $-\left(\frac{3}{5}x + \frac{3}{2}\right)$ जोड़ना।

(*ii*) दोनों पक्षों को अ-शून्य मानी गई संख्या $(x-2)$ द्वारा गुणा करना।

टिप्पणी : यह ध्यान देने योग्य है कि दोनों पक्षों में से एक ही परिमेय संख्या को घटाने का वास्तविक अर्थ दोनों पक्षों में इसके विपरीत को जोड़ना ही है, और समीकरण के दोनों पक्षों को एक ही अ-शून्य परिमेय संख्या से भाग देने का अर्थ दोनों पक्षों को इसके व्युत्क्रम से गुणा करना ही है। अतः अध्याय 1 के पृष्ठ पर वर्णित तुल्य समीकरणों को प्राप्त करने के चार मूल सिद्धांतों की बात करने के स्थान पर अब हम केवल योग और गुणन की चर्चा करने की स्थिति में पहुँच गए हैं।

प्रश्नावली

1. निम्नलिखित समीकरणों को मानक रैखिक रूप में परिणत कीजिए :

(*i*) $3x = 2$ (*ii*) $4 = \frac{2}{3}x$

(*iii*) $ax = b$ (*iv*) $5x + 4 = 2$

(*v*) $3x + \frac{1}{2} = \frac{7}{4}x$ (*vi*) $x - \frac{2}{3} = \cdot 5x - \frac{1}{4}$

(*vii*) $ax + b = c, (a \neq 0)$ (*viii*) $ax + b = cx\ ; (a \neq c)$

(*ix*) $ax + b = cx + d, (a \neq c)$.

2. सिद्ध कीजिए कि निम्नलिखित समीकरण रैखिक हैं :

(*i*) $\frac{x}{5} + \frac{x-4}{5} = 8$ (*ii*) $\frac{x-1}{10} + \frac{x-2}{15} = \frac{x-3}{20}$

(*iii*) $\cdot 15x + \cdot 3 = \cdot 75$ (*iv*) $\frac{7x-1}{4} + \frac{1}{3}\left[12x + \frac{1-x}{2}\right] = 0$

(*v*) $\frac{7-x}{7} + \frac{8-x}{8} + \frac{9-x}{9} = 1$

(vi) $\cdot 09x - \cdot 63 = \dfrac{\cdot 17x - \cdot 75}{4} + \cdot 01x.$

(vii) $\dfrac{3+x}{3} + \dfrac{4+x}{4} = \dfrac{5+x}{5} + 2$

(viii) $(x+1)(x+2) = (x+3)(x+5)$

(ix) $(x-3)(x-4) = (x-1)(x-5)$

(x) $(2x+1)(8x-3) = (4x-2)^2.$

3. सिद्ध कीजिए कि निम्नलिखित समीकरणें रैखिक नहीं हैं :

(i) $(x+3)(2x+5) = (2x+1)(3x-1)$

(ii) $x^2 - 4 = 2x(x+5).$

4. निम्नलिखित समीकरणों में से कौन-से रैखिक हैं और कौन-से नहीं ? प्रत्येक वर्ग में x चर का प्रभाव-क्षेत्र निर्दिष्ट कीजिए।

(i) $\dfrac{3}{x-1} + \dfrac{4}{x} = 0$ (ii) $\dfrac{1}{x+a} + \dfrac{1}{x-b} = 0$

(iii) $\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x+3} = 2$ (iv) $5 - \dfrac{7}{2x+1} = 0$

(v) $\dfrac{11}{x-7} = \dfrac{7}{x-4}$ (vi) $\dfrac{x-3}{2x+5} + \dfrac{1}{2} = 0$

(vii) $\dfrac{x-2}{x+5} = \dfrac{x+3}{x-4}$ (viii) $\dfrac{x-2}{x+1} + 3 = \dfrac{x+4}{x-1}.$

टिप्पणी : समीकरण

$$ax^2 + bx + c = 0$$

के तुल्य किसी समीकरण को तब द्विघात-समीकरण कहते हैं जब $a \neq 0$ और $a, b, c \in \mathbf{Q}$ ऐसे समीकरण का विस्तृत अध्ययन अगले अध्याय में किया जाएगा।

5. प्रश्न 4 में कौन-से समीकरण द्विघात हैं।

एक चर वाले किसी रैखिक समीकरण को तुल्य मानक रूप में सदैव

$$ax + b = 0, \qquad a, b \in \mathbf{Q} \qquad a \neq 0.$$

लिख सकते हैं।

अतः किसी रैखिक समीकरण को हल कर सकने के लिए हमें इस मानक रैखिक समीकरण का हल जानना चाहिए। नीचे हम इस रैखिक समीकरण का हल प्राप्त करेंगे। यहाँ a और b कोई परिमेय संख्याएँ हैं, $a \neq 0$ और चर का प्रभाव-क्षेत्र समुच्चय $\mathbf{Q}$ है।

हल करने की इस प्रक्रिया में हमें तुल्य समीकरणों की एक ऐसी श्रंखला प्राप्त करनी होती है जिसके अंतिम समीकरण का सत्य समुच्चय स्पष्ट हो।

वास्तव में

$$ax + b = 0$$

$$\Leftrightarrow \qquad (ax+b) + (-b) = 0 + (-b)$$

(दोनों पक्षों में $-b$ जोड़ने पर)

$$\Leftrightarrow \qquad ax = -b.$$

साथ ही क्योंकि $a \neq 0$, इसलिए इसका व्युत्क्रम $\frac{1}{a}$ है।

$$ax = -b$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a}(ax) = \frac{1}{a}(-b)$$

(दोनों पक्षों को $\frac{1}{a}$ से गुणा करने पर)

$$\Leftrightarrow \qquad x = -\frac{b}{a}.$$

अतः

$$ax + b = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}.$$

अब समीकरण

$$x = -\frac{b}{a}$$

के समाधान समुच्चय में केवल संख्या $-\frac{b}{a}$ ही है। इस प्रकार दत्त समीकरण

$$ax + b = 0$$

का समाधान समुच्चय

$$\left\{-\frac{b}{a}\right\}$$

है और इसलिए दत्त समीकरण का सत्य समुच्चय एकावयवीय है। अतः परिमेय संख्याओं के समुच्चय **Q** में एकचरीय रैखिक समीकरण का हल अद्वितीय है।

टिप्पणी : यह ध्यान देना अत्यंत आवश्यक है कि यदि हमारा व्यवहार-क्षेत्र परिमेय संख्याएँ (अथवा कम से कम पूर्ण संख्याएँ) न होतीं तो दोनों पक्षों में $(-b)$ जोड़ने का चरण और यदि हमारा व्यवहार-क्षेत्र परिमेय संख्याएँ (अथवा कम से कम भिन्न) न होतीं तो दोनों पक्षों को $\frac{1}{a}$ से गुणा करने का चरण असंभव था। किन्तु इन दोनों चरणों की संभावना के लिए यह अनिवार्य है कि चर का प्रभाव-क्षेत्र परिमेय संख्याओं का समुच्चय **Q** ही हो।

प्रश्नावली

1. पृ० 224 के प्रश्न 1 के समीकरणों को हल कीजिए।
2. पृ० 225 के प्रश्न 2 के समीकरणों को हल कीजिए।

3. पृ० 225 के प्रश्न 3 के समाधान समुच्चय निकालिए।

4. पृ० 220 के प्रश्न 4 के उन समीकरणों के सत्यसमुच्चय निकालिए जो रैखिक हैं।

दो एकचरीय-रैखिक समीकरणों की संगति

दो रैखिक समीकरण

$$ax + b = 0 \qquad a, b \in \mathbf{Q}, a \neq 0$$
$$cx + d = 0 \qquad c, d \in \mathbf{Q}, c \neq 0,$$

लीजिए। यहाँ चरण का प्रभाव-क्षेत्र समुच्चय $\mathbf{Q}$ है। हम कहते हैं कि समीकरण संगत हैं यदि x का कोई ऐसा मूल्य हो जो दोनों समीकरणों का समाधान करे। दूसरे शब्दों में दो समीकरण संगत होते हैं यदि इनके समाधान समुच्चयों का सर्वनिष्ठ अरिक्त हो।

पहले समीकरण का सत्य समुच्चय

$$\left\{-\frac{b}{a}\right\}$$

और दूसरे समीकरण का

$$\left\{-\frac{d}{c}\right\}.$$

है।

इन दोनों समुच्चयों का सर्वनिष्ठ तब और तभी अ-रिक्त होगा जब

$$-\frac{b}{a} = -\frac{d}{c}.$$

किन्तु

$$-\frac{b}{a} = -\frac{d}{c}$$

$$\Leftrightarrow \qquad bc = ad.$$

अतः ये दो रैखिक समीकरण तब और तभी संगत हैं जब

$$bc = ad. \qquad \ldots(1)$$

हम देखते हैं कि दो समीकरण तब और तभी संगत है जब वे तुल्य हों।

किन्हीं दो समीकरणों की संगति का प्रतिबंध जानने की प्रक्रिया विलोपन कहलाती है और (1) में चर x न आने के कारण (1) को दो समीकरणों का विलोपन फल कहते हैं।

प्रश्नावली

1. चर x का प्रभाव-क्षेत्र समुच्चय $\mathbf{Q}$ होने पर निम्नलिखित समीकरण-युग्मों के संगति-प्रतिबंध निकालिए।

(*i*) $x - a = 0, x - b = 0$ (*ii*) $x + a = 0, x + b = 0$

(*iii*) $x - l = 0, x + m = 0$ (*iv*) $x + l = 0, x - m = 0$

(*v*) $x - a = 0, bx = c$ (*vi*) $x - a = 0, bx + c = 0$

(*vii*) $x + a = 0, bx = c$ (*viii*) $x + a = 0, bx + c = 0$

(*ix*) $px + q = 0, lx = m$ (*x*) $px - q = 0, lx + m = 0$

(*xi*) $px - q = 0, lx - m = 0$ (*xii*) $ax + b = c, dx = e.$

2. निम्नलिखित समीकरण-युग्मों में से कौन-से संगत हैं और कौन-से नहीं ?

(*i*) $x - 3 = 0, 7x = 21$ (*ii*) $3x + 2 = 0, 2x = -\frac{4}{3}$

(*iii*) $3x + 5 = 0, 8x + 21 = 0$ (*iv*) $5x = 4, \frac{5}{8} x - \frac{1}{2} = 0.$

3. a, b को विभिन्न अ-शून्य परिमेय सख्याएँ मान कर बताइए कि निम्नलिखित समीकरण युग्मों में से कौन-से संगत हैं ?

(*i*) $2x - 3a = 0, \frac{1}{3} x = \frac{a}{2}$ (*ii*) $ax + 2b = 0, 3x + \frac{b}{a} = 0$

(*iii*) $ax + b = 0, x = \frac{b}{a}$ (*iv*) $ax + b = 0, a^2x = ab$

(*v*) $ax + b = 0, \frac{a^2}{b^2} x + \frac{a}{b} = 0$ (*vi*) $ax + b = 0, a^2x + b^2 = 0.$

4. निम्नलिखित समीकरण-युग्मों में से कौन-से संगत हैं और कौन-से नहीं ?

(*i*) $\frac{x-3}{7} + \frac{5-x}{3} = 0, \quad \frac{x-3}{3} + \frac{5-x}{7} = 0$

(*ii*) $\frac{7-x}{7} - \frac{8-x}{8} + \frac{9-x}{9} = 1, \frac{3-x}{3} - \frac{4-x}{4} + \frac{5-x}{5} = 1$

(*iii*) $\frac{2x+3}{3} + \frac{x+8}{8} - \frac{3x+11}{11} = 1, \frac{x+2}{2} - \frac{5x+7}{7} + \frac{8x+9}{9} = 1$

(*iv*) $\frac{3x-1}{4} + \frac{1}{7}\left[9x + \frac{1-x}{3}\right] = 0, \frac{4x-2}{5} + \frac{1}{8}\left[10x + \frac{1-x}{4}\right] = 0.$

44. द्विचरीय-रैखिक समीकरण

दो चरों x, y वाले समीकरण को तब रैखिक कहते हैं जब वह

$$ax + by + c = 0 \quad \ldots(1)$$

रूप वाले किसी समीकरण के तुल्य हो। यहाँ a, b, c परिमेय संख्याएँ हैं और a और b दोनों एक साथ शून्य नहीं हैं। a और b को क्रमशः x और y के गुणांक और c को समीकरण (1) का अचर पद कहते हैं। साथ ही (1) को दो चरों x और y वाले रैखिक समीकरण का मानक रूप कहते हैं।

उदाहरणार्थ समीकरण

$$(2x - 3) + (5 - 4y) = \frac{1}{2} y + 3x + 5$$

लीजिए। हम तुल्य समीकरणों की निम्नलिखित शृंखला प्राप्त करते हैं :

$$2x - 4y + 2 = 3x + \frac{1}{2}y + 5$$

$$\Leftrightarrow 2x - 4y + 2 - \left(3x + \frac{1}{2} y + 5 \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow -x - \frac{9}{2} y - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{9}{2} y + 3 = 0.$$

इस शृंखला के अंतिम समीकरण का रूप (1) जैसा होने के कारण दत्त समीकरण रैखिक है।

एक और उदाहरण के रूप में, समीकरण

$$\frac{7x - 5}{3 - 11y} = 4$$

लीजिए। निश्चय ही चर y का मान $\frac{3}{11}$ नहीं हो सकता क्योंकि उससे $(3 - 11y)$ शून्य हो जाएगा। y के प्रभाव-क्षेत्र की यह सीमा बांध लेने के पश्चात तुल्य समीकरणों की निम्नलिखित शृंखला प्राप्त होती है

$$7x - 5 = 4(3 - 11y)$$
$$\Leftrightarrow 7x - 5 = 12 - 44y$$
$$\Leftrightarrow 7x + 44y - 17 = 0$$
$$\Leftrightarrow 7x + 44y + (-17) = 0$$

इनमें से अंतिम का रूप (1) जैसा है। अतः दत्त समीकरण रैखिक है।

प्रश्नावली

1. निम्नलिखित समीकरणों को मानक रैखिक रूप में परिणत कीजिए।

(i) $2x + 3y = 4$ (ii) $2x + 4 = 3y$

(iii) $3y + 4 = 2x$ (iv) $2x + 2 = 3y + 5$

(v) $x - y - 3 = 2x + 3y - 5$ (vi) $3x - 2y + 5 = 7x + 5$

(vii) $\frac{3x - 5}{2} + \frac{3 - 4y}{4} = \frac{3y}{4}$

(viii) $\frac{x + 2y}{3} + \frac{3y - 4}{12} = \frac{7x + 11y + 3}{2}$.

2. निम्नलिखित समीकरणों में से कौन-से रैखिक हैं, कौन-से नहीं ? साथ ही उन सीमाओं का उल्लेख कीजिए जो प्रत्येक वर्ग के चरों x और y के प्रभाव-क्षेत्रों पर बांधनी पड़ती हैं।

(i) $\frac{x - 3}{y} + 4 = 0$ (ii) $\frac{2y + 3}{x - 5} + 7 = 0$

(iii) $(x + 4) + \frac{3}{y} = 0$ (iv) $\frac{3}{2x + 5} + \frac{7}{6 - 13y} = 0$

(v) $\frac{x + 7}{2y + 3} - \frac{3x - 5}{6y - 1} = 0$ (vi) $\frac{2x - 3}{7y + 11} + \frac{3 + 8x}{9 - 28y} = 0.$

द्विचरीय रैखिक समीकरण का हल

रैखिक समीकरण

$$2x - 3y + 4 = 0$$

लीजिए और मान लीजिए कि दोनों चरों x, y का प्रभाव-क्षेत्र परिमेय संख्याओं का समुच्चय **Q** है। इस समीकरण का तुल्य रूप

$$2x + 4 = 3y$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x + 4}{3} = y.$$

Q के अंग के रूप में x को कोई मान देने पर हम **Q** में ही उसके अनुरूप y का मान प्राप्त करते हैं। जैसे, यदि x का मान 0 हो तो y का मान $\frac{4}{3}$ है। तब हम कहते हैं कि क्रमित युग्म

$$\left(0, \frac{4}{3}\right)$$

दत्त समीकरण का एक हल है। ठीक इसी भाँति हम देख सकते हैं कि

$$(1, 2), \left(2, \frac{8}{3}\right), \left(-1, \frac{2}{3}\right), (-2, 0)$$

परिमेय संख्याओं के कुछ और क्रमित युग्म हैं जो इस समीकरण के हल हैं।

यह सत्यापित करना तनिक भी कठिन नहीं है कि क्रमित युग्म

$$(2, 1)$$

दत्त समीकरण का हल नहीं है।

सावधान :

पाठक यह ध्यानपूर्वक देखें कि (1, 2) तो समीकरण का हल है किन्तु (2, 1) नहीं। यद्यपि दोनों क्रमित युग्मों में आने वाली दोनों संख्याएँ वही हैं फिर भी ये दोनों विभिन्न हैं। इस प्रकार हम संख्याओं के युग्म और क्रमित युग्म में भेद करते हैं। क्रमित युग्म में दो संख्याओं के आने का क्रम अत्यंत महत्वपूर्ण है अर्थात् क्रमित युग्म में प्रथम अथवा बायाँ अंग तथा द्वितीय अथवा दायाँ अंग निर्दिष्ट होता है। संख्याओं के युग्म के ही वर्णन में ऐसा विनिर्देश नहीं होता।

हम परिमेय संख्याओं के ऐसे पाँच क्रमित युग्मों को पहले ही सूचिबद्ध कर चुके हैं जो दिए हुए समीकरण युग्मों के हल हैं। अब एक स्वाभाविक प्रश्न उठता है।

'क्या हम ऐसे सभी क्रमित युग्म लिख सकते हैं जो दिए हुए समीकरण के हल हैं?' उत्तर बलात्मक 'न' है क्योंकि x को कोई भी मान दिया जा सकता है और तब इसके लिए अनुरूप y का मान प्राप्त कर सकते हैं। अतः दत्त समीकरण का ऐसा सत्य समुच्चय, जिस में परिमेय संख्याओं के क्रमित युग्म हैं, अनन्त है।

द्विचरीय मानक रैखिक समीकरण के हल का विवेचन करने से पूर्व हम नीचे क्रमित युग्मों की धारणा का और अधिक विस्तार से अध्ययन करेंगे।

समुच्चय $\mathbf{Q} \times \mathbf{Q}$ या $\mathbf{Q}^2$

परिभाषा—समुच्चय $\mathbf{Q} \times \mathbf{Q}$ या $\mathbf{Q}^2$ ऐसे सभी क्रमित युग्मों (a, b) का समुच्चय है जिनमें $a, b \in \mathbf{Q}$. संख्या a को क्रमित युग्म (a, b) का पहला अंग अथवा बांयाँ अंग और b को इस युग्म का दूसरा अंग अथवा दायाँ अंग कहते हैं।

उदाहरणार्थ,

$$(1, 1), (0, 1) \left(\frac{1}{2}, -\frac{5}{2}\right), (-\cdot 5, -1\cdot\dot{7}5)$$

समुच्चय $\mathbf{Q} \times \mathbf{Q}$ के कुछ अंग हैं।

समुच्चय निर्माता संकेतन में, $\mathbf{Q} \times \mathbf{Q}$ को निम्नलिखित प्रतीक रूप में लिखा जा सकता है:

$$\mathbf{Q} \times \mathbf{Q} = \{(a, b) : a \in \mathbf{Q}, b \in \mathbf{Q}\}.$$

परिभाषा—दो क्रमित युग्मों को तब और तभी बराबर, वही अथवा अभिन्न कहा जाता है जब उनके पहले अंग बराबर हों और दूसरे अंग भी बराबर हों।

उदाहरणार्थ, क्रमित युग्म

$$(3, 5), (7 - 4, 2 + 3)$$

तो बराबर हैं किन्तु

$$(3, 5), (5, 3)$$

बराबर नहीं हैं। हम देखते हैं कि दो क्रमित युग्म उनकी संख्याएँ बराबर होने पर भी विभिन्न हो सकते हैं क्रमित युग्म के अंगों के आने का क्रम अत्यंत महत्वपूर्ण होता है।

व्यापक रूप में,

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \text{ और } b = d.$$

प्रश्नावली

1. परिमेय संख्याओं के 10 विभिन्न क्रमित युग्म लिखिए।

2. निम्नलिखित में बताइए कि दो क्रमित युग्म समान हैं अथवा नहीं।

(*i*) $(1, 1), \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}, 2\cdot 5 - 1\cdot 5\right)$ (*ii*) $(3, 4), (3, 7)$

(*iii*) $(7, 2), (5, 2)$ (*iv*) $(11, 13), (13 - 2, 11 + 2)$

(*v*) $(13, 11), (13 - 2, 11 + 2)$ (*vi*) $(14, 19), \left(7, \frac{19}{2}\right)$

(*vii*) $(24, 36), (6, 9)$ (*viii*) $(-4, 8), (4, -8)$

(*ix*) $(a, -b), (-a, b)$ (*x*) $(a, b), (-a, -b)$

(*xi*) $(a, b), (a + b, a + b)$ (*xii*) $(a, b), (a + c, b + c)$.

[(*ix*) से (*xii*) तक यह माना गया है कि a, b, c विभिन्न अ-शून्य परिमेय संख्याएँ हैं]

उदाहरण

ऐसे क्रमित युग्मों का समुच्चय लिखिए जिनके लिए

$$\frac{22x + y - 11}{4 - 7y}$$

सार्थक नहीं है।

हल—दत्त व्यंजक के सार्थक होने के लिए यह आवश्यक है कि $4 - 7y \neq 0$. अतः व्यंजक तभी सार्थक नहीं होगा जब $4-7y=0$ अर्थात् जब

$$y = \frac{4}{7}$$

ऐसे क्रमिक युग्मों का समुच्चय, जिनके लिए व्यंजक सार्थक नहीं,

$$\left\{\left(x, \frac{4}{7}\right) : x \in \mathbf{Q}\right\}.$$

है। यह समुच्चय, निश्चय ही, $\mathbf{Q} \times \mathbf{Q}$ का उप-समुच्चय है। क्रमित युग्म जिनके लिए दत्त व्यंजक सार्थक है समुच्चय

$$\left\{(x, y) : x, y \in \mathbf{Q}, y \neq \frac{4}{7}\right\}.$$

के अंग होंगे।

प्रश्नावली

1. ऐसे क्रमित युग्मों के समुच्चय लिखिए जिनके लिए निम्नलिखित व्यंजक सार्थक नहीं हैं।

   (i) $\frac{3x - 4}{y}$ (ii) $\frac{x}{2y + 5}$

   (iii) $\frac{x - y + 3}{7y - 11}$ (iv) $\frac{4 - 2y}{x}$

   (v) $\frac{y}{3x + 5}$ (vi) $\frac{2x + 3y + 7}{5 - 8x}$.

2. ऐसे क्रमित युग्मों के समुच्चय लिखिए जिनके लिए प्रश्न 1 के व्यंजक सार्थक हैं।

3. निम्नलिखित रैखिक समीकरणों में से प्रत्येक के कम से कम पाँच हल लिखिए।

   (i) $x + y + 1 = 0$ (ii) $x + y + 5 = 0$

   (iii) $x - y + 3 = 0$ (iv) $-x + y - 4 = 0$

   (v) $2x + 3y - 5 = 0$ (vi) $3x + 4y + 7 = 0$

   (vii) $3x - 7y + 4 = 0$ (viii) $-4x + 5y - 9 = 0$

   (ix) $\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}y + 3 = 0$ (x) $\cdot 75x - 1\cdot 25y + 3\cdot 5 = 0$.

4. पृष्ठ 230 पर प्रश्न 1 के प्रत्येक रैखिक समीकरण के कम से कम दो हल निकालिए।
5. पृष्ठ 230 पर प्रश्न 2 के उन समीकरणों के कम से कम तीन हल निकालिए जो रैखिक हों।

द्विचरीय मानक रैखिक समीकरण का हल

दो चरों वाला मानक रैखिक समीकरण

$$ax + by + c = 0,$$

है। इसमें प्रत्येक चर x, y का प्रभाव-क्षेत्र $\mathbf{Q}$ है और a, b, c ऐसी परिमेय संख्याएँ हैं जिनमें a और b दोनों एक साथ शून्य नहीं हैं।

मान लीजिए कि

$$a \neq 0.$$

अब

$$ax + by + c = 0$$
$$\Leftrightarrow ax + by + c - (by + c) = -(by + c)$$
$$\Leftrightarrow \qquad ax = -(by + c)$$

साथ ही, क्योंकि $a \neq 0$, इसलिए $\frac{1}{a}$ विद्यमान है और तब

$$ax = -(by + c)$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{a}(ax) = \frac{1}{a}\{-(by + c)\}$$
$$\Leftrightarrow \qquad x = \frac{by + c}{a}.$$

y को $\mathbf{Q}$ के अंग के रूप में कोई भी मान देकर हम x का मान प्राप्त कर सकते हैं। उदाहरणार्थ यदि y के मान k के अनुरूप x का मान h हो तो

$$h = -\frac{bk + c}{a}.$$

अतः क्रमित युग्म (h, k) दत्त समीकरण का एक हल है। y को विभिन्न मान देकर x के विभिन्न मान प्राप्त होते हैं। x के ये मान विभिन्न नहीं होते यदि $b = 0$. दत्त समीकरण का सत्य समुच्चय

$$\{(h, k) : h = -\frac{bk + c}{a}, h, k \in \mathbf{Q}\}.$$

है। यह सत्य समुच्चय निश्चय ही $\mathbf{Q} \times \mathbf{Q}$ का उप-समुच्चय है।

ठीक इसी प्रकार पाठक यह देख सकता है कि यदि $b \neq 0$ तो

$$ax + by + c = 0$$
$$\Leftrightarrow \qquad y = -\frac{ax + c}{b}.$$

x को कोई भी मान देकर हम y का अनुरूप मान प्राप्त कर सकते हैं। क्रमित युग्म (u, v) जिसमें

$$v = -\frac{au + c}{b}$$

दत्त समीकरण का एक हल है। अतः समीकरण का सत्य समुच्चय

$$\{(u, v) : v = -\frac{au + c}{b}, u, v \in \mathbf{Q}\}.$$

है।

टिप्पणी—यदि a और b में से कोई भी शून्य न हो तो दोनों विधियों में से किसी एक का प्रयोग किया जा सकता है क्योंकि ऐसी स्थिति में

$$ax + by + c = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x = -\frac{by + c}{a} \quad \ldots(i)$$

$$\Leftrightarrow \quad y = -\frac{ax + c}{b}. \quad \ldots(ii)$$

(i) द्वारा प्राप्त कोई भी क्रमित युग्म (ii) का समाधान करेगा और विलोमतः भी।

45. द्विचरीय रैखिक समीकरणों के निकाय

x और y में दो रैखिक समीकरण

$$ax + by + c = 0 \quad \ldots(1)$$

$$a'x + b'y + c' = 0 \quad \ldots(2)$$

लीजिए। यहाँ a, b, c सभी परिमेय संख्याएँ हैं और चर x और y में से प्रत्येक का प्रभाव-क्षेत्र समुच्चय $\mathbf{Q}$ है। इन दो खुले कथनों (1) और (2) का दो विभिन्न रीतियों द्वारा संयोजित किया जा सकता है और इस प्रकार निम्नलिखित दो विभिन्न संयुक्त कथन प्राप्त होते हैं।

$$ax + by + c = 0 \quad \text{या} \quad a'x + b'y + c' = 0 \quad \ldots(3)$$

$$ax + by + c = 0 \quad \text{और} \quad a'x + b'y + c' = 0 \quad \ldots(4)$$

अतः कथन (3) तभी सत्य है जब (1) सत्य हो या (2) सत्य हो तथा कथन (4) तभी सत्य है जब (1) और (2) दोनों सत्य हों। (3) का सत्य समुच्चय (1) और (2) के सत्य समुच्चयों का संघ होगा तथा (4) के सत्य समुच्चय में (1) और (2) दोनों के हल होंगे अर्थात् (4) का सत्य समुच्चय (1) और (2) के सत्य समुच्चयों का सर्वनिष्ठ है। संयुक्त कथन (4) को हम निम्नलिखित रूप में लिखना स्वीकार करेंगे।

$$\begin{Bmatrix} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0. \end{Bmatrix} \quad \ldots(5)$$

इस भाग में हम संयुक्त कथन (4) के हल का अध्ययन करेंगे। हम कहते हैं कि हम समीकरण (1) और (2) का एक साथ हल निकाल रहे हैं क्योंकि (4) का कोई हल (1) और (2) का एक साथ ही हल होगा। (4) के कोई हल के अध्ययन को कभी-कभी युगमत् समीकरणों के हल का अध्ययन भी कहते हैं। किन्तु व्यापक रूप में ऐसा करने से पूर्व, हम नीचे कुछ उदाहरणों का विचार करेंगे।

उदाहरण 1. $2x-3y+4=0$ और $3x+y-5=0$

का सत्य समुच्चय निकालिए।

हल—हम पहले ही पिछले भाग में देख चुके हैं कि क्रमित युग्म

$$\left(0, \frac{4}{3}\right), \left(1, 2\right), \left(2, \frac{8}{3}\right), \left(-1, \frac{2}{3}\right), (-2, 0)$$

इन समीकरणों में से पहले के कुछ हल हैं। दूसरा समीकरण

$$y = 5 - 3x.$$

के तुल्य है।

x को विभिन्न मान

$$0, 1, 2, -1, -2, \ldots\ldots$$

देकर हम y के अनुरूप मान

$$5, 2, -1, 8, 11, \ldots\ldots$$

प्राप्त करते हैं। इस प्रकार दूसरे समीकरण के कुछ हल

$$(0, 5), (1, 2), (2, -1), (-1, 8), (-2, 11).$$

हैं।

क्रमित युग्म $(1, 2)$ दोनों समीकरणों के सत्य समुच्चयों में है और इस कारण $(1, 2)$ इन दोनों युगपत् समीकरणों का एक हल है। किन्तु यह भी संभव है कि हम x के लिए मान 1 न लेते। साथ ही, यद्यपि हमने दो समीकरणों का हल तो प्राप्त कर लिया है किन्तु यह तो निश्चय नहीं है कि यही इन दो समीकरणों का हल है। नीचे इसी समस्या को हल करने की अधिक संतोषजनक विधि दी जा रही है।

वैकल्पिक हल

$$2x - 3y + 4 = 0 \quad \text{और} \quad 3x + y - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x - 3y + 4 = 0 \quad \text{और} \quad 3(3x + y - 5) = 0.$$

(हमने दूसरे समीकरण के दोनों पक्षों को उसे गुणा किया है)

$$\Leftrightarrow 2x - 3y + 4 = 0 \quad \text{और} \quad 2x - 3y + 4 + 3(3x + y - 5) = 0$$

(हमने दूसरे समीकरण में पहले को जोड़ा है)

$$\Leftrightarrow 2x - 3y + 4 = 0 \quad \text{और} \quad 11x - 11 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x - 3y + 4 = 0 \quad \text{और} \quad x = 1$$

$$\Leftrightarrow 2\cdot1 - 3y + 4 = 0 \quad \text{और} \quad x = 1$$

(हमने पहले समीकरण में $x=1$ का उपयोग किया है)

$$\Leftrightarrow \quad 6 - 3y = 0 \quad \text{और} \quad x = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad y = 2 \quad \text{और} \quad x = 1$$

अब

$$y = 2 \quad \text{और} \quad x = 1.$$

का सत्य समुच्चय

$$\{(1, 2)\}.$$

है ।

इस प्रकार दत्त संयुक्त कथन का सत्य समुच्चय

$$\{(1, 2)\}.$$

है । अतः इस उदाहरण में हमें दो युगपत् समीकरणों का अद्वितीय हल प्राप्त हुआ ।

टिप्पणी—हमने केवल इतना ही किया है कि दिए हुए संयुक्त कथन को पहले एक ऐसे तुल्य रूप में परिणत किया जिस में दो समीकरणों में से एक में केवल एक ही चर आता है । तब आवश्यक चरणों द्वारा हम तुल्य रूप

$$x = h \quad \text{और} \quad y = k,$$

प्राप्त करते हैं जिसका सत्य समुच्चय स्पष्टतः

$$\{(h, k)\}.$$

है ।

2. समीकरणों

$$\begin{cases} 3x + 4y + 5 = 0 \\ 2x + 3y - 7 = 0 \end{cases}$$

को हल कीजिए ।

हल

$$\begin{cases} 3x + 4y + 5 = 0 \\ 2x + 3y - 7 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3(x3 + 4y + 5) = 0 \\ 4(2x + 3y - 7) = 0. \end{cases}$$

(हमने दोनों समीकरणों को क्रमशः 3 और 4 से गुणा किया है ।)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3(3x + 4y + 5) = 0 \\ 4(2x + 3y - 7) - 3(3x + 4y + 5) = 0. \end{cases}$$

(हमने दूसरे समीकरण में से पहले को घटाया है ।)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 4y + 5) = 0 \\ (8 - 9)\, x + (12 - 12)\, y - 28 - 15 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 4y + 5 = 0 \\ \quad - x - 43 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 4y + 5 = 0 \\ \qquad x = -43 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3(-43) + 4y + 5 = 0 \\ \qquad\qquad x = -43. \end{cases}$$

(हमने पहले समीकरण को बदलने के लिए दूसरे का उपयोग किया है।)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4y - 124 = 0 \\ \qquad x = -43 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \qquad y = 31 \\ \qquad x = -43. \end{cases}$$

अतः अपेक्षित सत्य समुच्चय

$$\{(-43, 31)\}$$

है।

टिप्पणी—ऊपर विवेचित दो उदाहरणों से ऐसा भी प्रतीत हो सकता है कि योजक 'और' के द्वारा दो द्विचरीय रैखिक समीकरणों वाले संयुक्त कथन का सदैव अद्वितीय हल होता है। यह प्रेक्षण ठीक नहीं है। वास्तव में, नीचे हम उन प्रकरणों का एक-एक उदाहरण ले रहे हैं जिनमें

(*i*) कोई हल नहीं होता,

(*ii*) हलों की संख्या अनन्त होती है।

3. $7x - 2y + 5 = 0$ और $21x - 6y + 10 = 0$

का सत्य समुच्चय निकालिए।

हल—अब

$$7x - 2y + 5 = 0 \quad \text{और} \quad 21x - 6y + 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow \; 3(7x - 2y + 5) = 0 \quad \text{और} \quad 21x - 6y + 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow \; 3(7x - 2y + 5) = 0 \quad \text{और}$$

$$21x - 6y + 10 - 3(7x - 2y + 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow \; 7x - 2y + 5 = 0 \quad \text{और} \quad 10 - 15 = 0$$

किन्तु $10 - 15 = 0$ मिथ्या है।

इसलिए $7x - 2y + 5 = 0$ और $10 - 15 = 0$ भी मिथ्या है।

इस प्रकार खुला कथन

$$7x - 2y + 5 = 0 \text{ और } 21x - 6y + 10 = 6$$

मिथ्या है। अतः अपेक्षित सत्य समुच्चय रिक्त है।

4. $6x - 8y + 5 = 0$ और $9x - 12y + \dfrac{15}{2} = 0.$

का सत्य समुच्चय निकालिए।

हल—यहाँ

$$6x - 8y + 5 = 0 \text{ और } 9x - 12y + \frac{15}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 3(6x - 8y + 5) = 0 \text{ और } 2\left(9x - 12y + \frac{15}{2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3(6x - 8y + 5) = 0$$

$$\text{और} \quad 2\left(9x - 12y + \frac{15}{2}\right) - 3(6x - 8y + 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 6x - 8y + 5 = 0 \quad \text{और} \quad 0 = 0.$$

किन्तु 0 = 0 सत्य है। इस कारण

$$6x - 8y + 5 = 0 \text{ और } 9x - 12y + \frac{15}{2} = 0.$$

$$\Leftrightarrow \quad 6x - 8y + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 8y = 6x + 5$$

$$\Leftrightarrow \quad y = \frac{6x+5}{8}.$$

अतः सत्य समुच्चय

$$\{h, k) : k = \frac{6h + 5}{8}, h, k \in \mathbf{Q}\}.$$

ऊपर विवेचित चार उदाहरणों के आधार पर हम देखते हैं कि संयुक्त कथन

$$ax + by + c = 0 \qquad a'x + b'y + c' = 0$$

का सत्य समुच्चय या तो एकावयवीय या रिक्त या अनन्त है। तदनुसार, हम कहते हैं कि युगपत् रैखिक समीकरण क्रमशः (*i*) अद्वितीय हल (*ii*) कोई हल नहीं (*iii*) अनन्त हल रखते हैं। कभी-कभी हम इन तीन विभिन्न स्थितियों का वर्णन निम्नलिखित कथनों द्वारा भी करते हैं।

(*i*) "रैखिक समीकरण संगत हैं।"

(*ii*) "रैखिक समीकरण असंगत हैं।"

(*iii*) "रैखिक समीकरण आश्रित हैं।"

प्रश्नावली

1. निम्नलिखित समीकरण निकायों को हल कीजिए।

(*i*) $\begin{cases} x + y = 25 \\ x - y = 4 \end{cases}$ (*ii*) $\begin{cases} 2x + y = 13 \\ 7x - y = 2 \end{cases}$

(*iii*) $\begin{cases} x + y = 11 \\ -x + y = 15 \end{cases}$ (*iv*) $\begin{cases} x + 3y = 7 \\ -x + 8y = 4 \end{cases}$

(*v*) $\begin{cases} x + 3y = 12 \\ 2x + 3y = 6 \end{cases}$ (*vi*) $\begin{cases} 4x - 5y = 2 \\ -4x + 11y = 10 \end{cases}$

(vii $\begin{cases} 5x + 7y = 28 \\ 3x + 7y = 25 \end{cases}$ (viii) $\begin{cases} -3x + 4y = 13 \\ -3x - 2y = 10 \end{cases}$

(ix) $\begin{cases} 17x - 11y = 13 \\ 5x - 11y = 1. \end{cases}$

2. निम्नलिखित समीकरण निकायों के सत्य समुच्चय निकालिए।

(i) $2x - 5y + 6 = 0$ और $3x + 4 = 0$

(ii) $-3x + 4y - 2 = 0$ और $3 - 2y = 0$

(iii) $7x + 3y - 11 = 0$ और $3x + 7y - 5 = 0$

(iv) $2x + 3y - 15 = 0$ और $3x - 2y + 4 = 0$

(v) $2x + 4y - 7 = 0$ और $6x + 8y - 9 = 0$

(vi) $2x - 3y + 4 = 0$ और $8x - 12y + 16 = 0$

(vii) $6x - 21y + 12 = 0$ और $10x - 35y + 20 = 0$

(viii) $3x - 7y + 3 = 0$ और $5x - 6y + 5 = 0$

(ix) $4x + 5y - 5 = 0$ और $7x + 8y - 8 = 0$

(x) $8x - 14y + 10 = 0$ और $12x - 21y - 14 = 0$

(xi) $10x - 5y + 15 = 0$ और $4x - 2y + 6 = 0$

3. चर x और y का प्रभाव-क्षेत्र अ-शून्य परिमेय संख्याओं का समुच्चय $\mathbf{Q}_0$ मान कर निम्नलिखित समीकरण निकायों के सत्य समुच्चय निकालिए।

(i) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 12$, $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} = 4$ (ii) $\dfrac{3}{x} + \dfrac{2}{y} = 5$, $\dfrac{5}{x} - \dfrac{2}{y} = 3$

(iii) $\dfrac{8}{x} + \dfrac{15}{y} = \dfrac{33}{2}$, $\dfrac{4}{x} - \dfrac{35}{y} = \dfrac{43}{2}$ (iv) $-\dfrac{1}{7x} + \dfrac{1}{6y} = 3$, $\dfrac{1}{2x} - \dfrac{1}{3y} = 5$

(v) $\dfrac{3}{4x} - \dfrac{3}{y} = \dfrac{7}{5}$, $\dfrac{5}{2x} + \dfrac{5}{2y} = -\dfrac{11}{3}$ (vi) $\dfrac{1}{x} + y = 3$, $\dfrac{3}{x} - y = 3$

(vii) $\dfrac{4}{x} + 5y = 7$, $\dfrac{3}{x} + 4y = 5$ (viii) $2x + \dfrac{3}{y} = 10$, $7x - \dfrac{5}{y} = 4$

(ix) $\dfrac{7}{x} - \dfrac{5}{y} = 12$ (x) $\dfrac{14}{x} + \dfrac{7}{y} = 10$

$$\frac{14}{x} - \frac{10}{y} = 11 \qquad \frac{21}{x} + \frac{21}{2y} = 15$$

4. निम्नलिखित समीकरण निकायों के सत्य समुच्चय निकालिए।

(i) $\frac{x}{4} - \frac{y+32}{8} = 6$, $\frac{3x-2y}{5} - \frac{y}{8} = 25$ (ii) $\frac{x}{20} + \frac{2y-3}{11} = 4$, $3 - \frac{x}{5} + \frac{5y}{18} = 4$

(iii) $x + y = \frac{1}{7}(10x + y)$, $10x + y = (10y + x) + 18$ (iv) $\frac{x+y}{3} - \frac{x-y}{2} = 42$, $\frac{x-y}{9} + \frac{x}{2} = 5$

(v) $\frac{x-y}{4} - \frac{x-3y}{5} = y - 3$, $\frac{3}{4}(x-y) + \frac{5}{6}(x+y) = 18$ (vi) $\frac{x-y}{10} + \frac{5x}{6} = 3$, $2x + 4y - \frac{2x+3y}{2} = -2$

(vii) $\frac{x+y}{7} + \frac{x-y}{5} = 2$, $\frac{x+y}{7} - \frac{x-5}{5} = -2$ (viii) $\frac{2x+3y}{5} + \frac{2x-3y}{3} = 4$, $\frac{2x+3y}{5} - \frac{2x-3y}{3} = -4.$

दो द्विचरीय रैखिक समीकरण-व्यापक विमर्श

इन भाग में, हम दो समीकरणों

$$ax + by + c = 0,$$
$$a'x + b'y + c' = 0$$

के संगत, असंगत अथवा आश्रित होने के प्रतिबंध निकालेंगे। इन प्रतिबंधों को ऐसे कथनों द्वारा सूत्रबद्ध करेंगे जिनमें गुणांक

$$a, b, c ; a', b', c'.$$

आते हैं।

हम निकाय को ऐसे तुल्य रूप में परिणत करते हैं जिसमें समीकरणों में से एक में केवल एक ही चर आए। इसका उपयोग निकाय को ऐसे तुल्य रूप में प्रस्तुत करने के लिए किया जाता है जिस का हल स्पष्ट हो।

वास्तव में

$$ax + by + c = 0 \quad \text{और} \quad a'x + b'y + c' = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad a'(ax + by + c) = 0 \quad \text{और} \quad a(a'x + b'y + c') = 0$$

(हमने दो समीकरणों के दोनों पक्षों को क्रमश: a' और a से गुणा किया है)

$$\Leftrightarrow \quad a'(ax + by + c) = 0.$$

और $$a(a'x + b'y + c') - a'(ax + by + c) = 0.$$

(हमने दूसरे में से पहले को घटाया है)

और

$$ax + by + c = 0$$

$$(ab' - a'b)\, y + (ac' - a'c) = 0$$

अब मान लीजिए कि

$$ab' \neq a'b.$$

तब

$$ab' - a'b \neq 0$$

और इसलिए

$$1/(ab' - a'b)$$

विद्यमान है। दत्त निकाय

$$ax + by + c = 0$$

और

$$y + \frac{ac' - a'c}{ab' - a'b} = 0$$

के तुल्य है। पुनः इसका तुल्य रूप है

$$ax + by + c = 0$$

और

$$y = \frac{ca' - ac'}{ab' - a'b}$$

⇔

$$ax + b\, \frac{ca' - ac'}{ab' - a'b} + c = 0$$

और

$$y = \frac{ca' - ac'}{ab' - a'b}$$

⇔ $a\,(ab' - a'b)\, x + b\,(ca' - ac') + c\,(ab'\; a'b) = 0$

और

$$y = \frac{ca' - ac'}{ab' - a'b}$$

⇔

$$a\,(ab' - a'b)\, x + a\,(b'c - bc') = 0$$

और

$$y = \frac{ca' - ac'}{ab' - a'b}$$

⇔

$$x = \frac{bc' - b'c}{ab' - a'b}$$

और

$$y = \frac{ca' - ac'}{ab' - a'b}.$$

अतः दत्त निकाय का अद्वितीय हल

$$\left(\frac{bc' - cb'}{ab' - ab'}, \frac{ca' - ac'}{ab' - a'b}\right)$$

है, यदि

$$ab' - a'b \neq 0.$$

किन्तु यदि

$$ab' - a'b = 0,$$

हो तो (1) द्वारा दत्त् निकाय का तुल्य रूप

$$ax + by + c = 0$$

और

$$ac' - a'c = 0.$$

हो जाता है।

अब मान लीजिए कि

$$ac' - a'c \neq 0.$$

तब कथन

$$ac' - a'c = 0$$

मिथ्या होगा। और इस कारण संयुक्त कथन

$$ax + by + c = 0$$

और

$$ac' - a'c = 0$$

भी मिथ्या होगा। दत्त निकाय का सत्य समुच्चय रिक्त होगा।

किन्तु यदि

$$ab' - a'b = 0$$

और

$$ac' - a'c = 0$$

तो

$$ax + by + c = 0$$

और

$$ac' - a'c = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad ax + by + c = 0$$

क्योंकि $ac' - a'c = 0$ सत्य है।

अतः दत्त निकाय अकेले समीकरण

$$ax + by + c = 0$$

के तुल्य है और इसलिए निकाय का सत्य समुच्चय अनन्त होगा।

अतः समीकरण निकाय

(*i*) संगत (*ii*) असंगत (*iii*) आश्रित

है यदि

(*i*) $ab' \neq a'b$ (*ii*) $ab' = a'b, ac' \neq a'c$

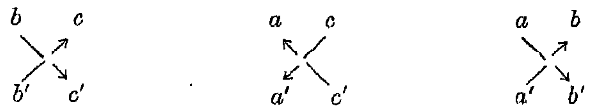
(*iii*) $ab' = a'b, ac' = a'c.$

कार्यकारी सूत्र :—यदि $ab' \neq a'b$ अर्थात् जब निकाय का अद्वितीय हल हो तब हल लिखने का निम्नलिखित सूत्र हो सकता है।

पहले हम पृथक्कृत गुणांक

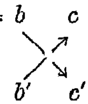
$$\begin{matrix} a & b & c \\ a' & b' & c'. \end{matrix}$$

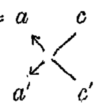
लिखते हैं फिर x और y के गुणांकों के और अचर पदों के स्तंभों को ढाँक कर हम क्रमशः

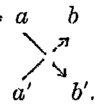


प्राप्त करते हैं।

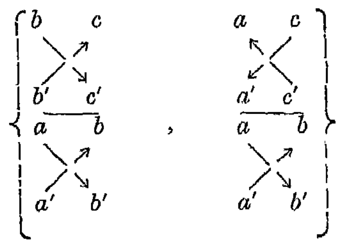
जैसे ऊपर दिखाया गया है हम बीच में बाण रख देते हैं। हम

$bc' - b'c =$ 

$ca' - ac' =$ 

$ab' - a'b =$ 

लिखना स्वीकार करते हैं। निकाय के हल को निम्नलिखित रूप में भी प्रदर्शित किया जा सकता है।



अद्वितीय हल को लिखने के इस सूत्र को वज्र-गुणन सूत्र कहते हैं। नीचे हम इस सूत्र द्वारा एक उदाहरण हल करेंगे।

उदाहरण—निकाय

$$\begin{cases} 3x - 5y + 4 = 0 \\ 12y + 4x - 3 = 0 \end{cases}$$

को हल कीजिए।

हल—हम निकाय का पुनर्लेखन निम्नलिखित रूप में करते हैं।

$$\begin{cases} 3x + (-5)y + 4 = 0 \\ 4x + 12y + (-3) = 0 \end{cases}$$

गुणांकों को पृथक् करने पर

$$\begin{array}{ccc} 3 & -5 & 4 \\ 4 & 12 & -3 \end{array}$$

प्राप्त होते हैं। तब अपेक्षित हल

$$\left\{ \frac{\begin{array}{cc} -5 & 4 \\ \times & \\ 12 & -3 \end{array}}{\begin{array}{cc} 3 & -5 \\ \times & \\ 4 & 12 \end{array}}, \frac{\begin{array}{cc} 3 & 4 \\ \times & \\ 4 & -3 \end{array}}{\begin{array}{cc} 3 & -5 \\ \times & \\ 4 & 12 \end{array}} \right\}$$

अर्थात्
$$\left(\frac{(-5)(-3) - 12 \times 4}{3 \times 12 - 4(-5)}, \frac{4 \times 4 - 3 \times (-3)}{3 \times 12 - 4(-5)}\right)$$

या
$$\left(\frac{15 - 48}{36 + 20}, \frac{16 + 9}{36 + 20}\right)$$

या
$$\left(\frac{-33}{56}, \frac{25}{56}\right)$$

है।

प्रश्नावली

1. a, b, d को विभिन्न अ-शून्य परिमेय संख्याएँ मान कर निम्नलिखित समीकरण निकायों को हल कीजिए।

(i) $\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ ax - by + d = 0 \end{cases}$ (ii) $\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ -ax + by + c = 0 \end{cases}$

(iii) $\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ bx - ay + d = 0 \end{cases}$ (iv) $\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ -bx + ay + d = 0 \end{cases}$

(v) $\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ dx + by + e = 0 \end{cases}$ (vi) $\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ ax + dy + e = 0 \end{cases}$

2. वज्र-गुणन सूत्र द्वारा निम्नलिखित समीकरण निकायों के सत्य समुच्चय निकालिए।

(i) $\begin{cases} 2x + 3y - 11 = 0 \\ 2x - 3y + 7 = 0 \end{cases}$ (ii) $\begin{cases} 2x + 3y - 5 = 0 \\ -2x + 3y - 7 = 0 \end{cases}$

(iii) $\begin{cases} 2x + 3y - 11 = 0 \\ 3x + 2y - 7 = 0 \end{cases}$ (iv) $\begin{cases} 2x + 3y - 11 = 0 \\ 3x - 2y + 7 = 0 \end{cases}$

(v) $\begin{cases} 2x + 3y - 7 = 0 \\ -3x + 2y + 5 = 0 \end{cases}$ (vi) $\begin{cases} 3x + 4y + 8 = 0 \\ 5x + 2y - 4 = 0 \end{cases}$

(vii) $\begin{cases} 4y - 3x - 11 = 0 \\ 7x - 3y + 5 = 0 \end{cases}$ (viii) $\begin{cases} 7x - 11y + 5 = 0 \\ 3y - 5x - 3 = 0. \end{cases}$

तीन द्विचरीय रैखिक समीकरणों की संगति

तीन समीकरण

$$ax + by + c = 0 \quad ...(1)$$
$$a'x + b'y + c' = 0 \quad ...(2)$$
$$a''x + b''y + c'' = 0. \quad ...(3)$$

लीजिए। तीनों समीकरणों के हल रूप में परिमेय संख्याओं को किसी क्रमित युग्म (h, k) के विद्यमान होने पर समीकरण निकाय संगत होता है।

व्यापक रूप में संगति-प्रतिबंध विवेचन प्रस्तुत पुस्तक के क्षेत्र से बाहर होने के कारण हम यहाँ मानते हैं कि तीन समीकरणों में से दो का अद्वितीय हल है। मान लीजिए कि पहले दो समीकरणों का अद्वितीय हल है। तब हम निकाय का संगति-प्रतिबंध निकालते हैं। अतः हम कल्पना

$$ab' \neq a'b$$

के अधीन कार्य करते हैं। ऐसी स्थिति में (1) और (2) का अद्वितीय हल

$$\left(\frac{bc' - b'c}{ab' - a'b}, \frac{ca' - ac'}{ab' - a'b}\right).$$

है। यह (3) का भी हल होगा यदि

$$a'' \frac{bc' - b'c}{ab' - a'b} + b'' \frac{ca' - ac'}{ab' - a'b} + c'' = 0$$

अथवा तुल्य रूप में

$$a''(bc' - b'c) + b''(ca' - ac') + c''(ab' - a'b) = 0. \quad ...(4)$$

हो।

अतः कल्पना $ab' \neq a'b$ के अधीन दत्त निकाय का संगति-प्रतिबंध (4) है। यहाँ यह कहना उचित होगा कि युग्म (ii), (iii) या (iii), (i) के अद्वितीयहल मानने पर भी प्रतिबंध यही आएगा।

प्रतिबंध (4) को दत्त समीकरण निकाय का विलोपन फल भी कहते हैं और संगति-प्रतिबंध निकालने की प्रक्रिया को विलोपन कहते हैं।

प्रश्नावली

निम्नलिखित समीकरण निकायों में से कौन-से संगत हैं और कौन-से नहीं ?

(i) $\begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ 2x + 3y - 8 = 0 \\ 5x + 8y - 11 = 0 \end{cases}$ (ii) $\begin{cases} 2x - 3y + 1 = 0 \\ 5x + 8y - 13 = 0 \\ 12x + 13y + 5 = 0 \end{cases}$

(iii) $\begin{cases} 5x + 3y - 13 = 0 \\ 2y - 5x - 8 = 0 \\ 7x + 4y + 18 = 0 \end{cases}$ (iv) $\begin{cases} 4x - 11y - 1 = 0 \\ 7x + 5y - 26 = 0 \\ 2x + y - 5 = 0 \end{cases}$

46. त्रिचरीय रैखिक समीकरण

तीन चरों x, y, z वाले किसी समीकरण को तब रैखिक कहते हैं जब वह

$$ax + by + cz + d = 0 \quad (1)$$

रूप वाले किसी समीकरण के तुल्य हो। यहाँ a, b, c, d परिमेय संख्याएँ हैं और a, b, c तीनों एक साथ शून्य नहीं।

उदाहरणार्थ, समीकरण

(i) $x + y + z = 5$ (ii) $(7x - 3) + (y - 4) = (\frac{1}{2}z + 5)$

रैखिक हैं क्योंकि वे क्रमशः

(iii) $1 . x + 1 . y + 1 . z + (-5) = 0$

(iv) $7x + 1 . y + (-\frac{1}{2}) z + (-12) = 0$

के तुल्य हैं जिनका रूप उपर्युक्त (1) जैसा है।

त्रिचरीय रैखिक समीकरण का हल

रैखिक समीकरण

$$2x + 5y - 7z - 3 = 0$$

को लीजिए। यहाँ प्रत्येक चर x, y, z का प्रभाव-क्षेत्र परिमेय संख्याओं का समुच्चय $\mathbf{Q}$ है। समीकरण तुल्य है

$$2x + 5y - 3 = 7z \quad \text{के}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x + 5y - 3}{7} = z.$$

x और y को $\mathbf{Q}$ के अंगों के रूप में कोई मान देने पर हम z का अनुरूप मान भी $\mathbf{Q}$ में ही प्राप्त करते हैं।

जैसे यदि x और y के मान 0, 0 हों तो z का मान $-\frac{3}{7}$ होगा। तब हम कहते हैं कि क्रमित त्रिक $(0, 0, -\frac{3}{7})$ दत्त समीकरण का हल है। ठीक इसी प्रकार हम देख सकते हैं कि

$$\left(0, 1, \frac{2}{7}\right), \left(0, 0, \frac{-1}{7}\right), \left(1, 1, \frac{4}{7}\right), \left(2, 1, \frac{6}{7}\right)$$

परिमेय संख्याओं के कुछ अन्य क्रमित त्रिक हैं जो समीकरण के हल हैं। निस्संदेह प्रत्येक क्रमित त्रिक समीकरण का हल नहीं है। उदाहरण के लिए, यह सरलतापूर्वक सत्यापित किया जा सकता है कि क्रमित त्रिक

$$\left(0, 1, \frac{-1}{7}\right)$$

दिए हुए समीकरण का हल नहीं है। हमने परिमेय संख्याओं के पाँच क्रमित त्रिक लिखे हैं जो दिए हुए समीकरण के हल हैं। क्योंकि x और y को कोई भी मान देने पर हम z का अनुरूप मान प्राप्त कर सकते हैं इसलिए हम देखते हैं कि दत्त समीकरण का परिमेय संख्याओं के क्रमित त्रिकों वाला सत्य समुच्चय अनन्त है।

समुच्चय $\mathbf{Q} \times \mathbf{Q} \times \mathbf{Q}$ या $\mathbf{Q}^3$

परिभाषा : समुच्चय $\mathbf{Q} \times \mathbf{Q} \times \mathbf{Q}$ या $\mathbf{Q}^3$ ऐसे सभी (a, b, c) क्रमित त्रिकों का समुच्चय है जिनमें $a, b, c \in \mathbf{Q}$. संख्याओं a, b, c को क्रमित त्रिक (a, b, c) का क्रमशः पहला, दूसरा और तीसरा अंग कहते हैं।

उदाहरणार्थ,

$$(1, 1, 1), (0, 0, 1), \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right), (\cdot 1, \cdot 01, \cdot 001)$$

समुच्चय $\mathbf{Q} \times \mathbf{Q} \times \mathbf{Q}$ के कुछ अंग हैं।

समुच्चय निर्माता संकेतन में $\mathbf{Q} \times \mathbf{Q} \times \mathbf{Q}$ को निम्नलिखित प्रतीक रूप में लिखा जा सकता है :

$$\mathbf{Q} \times \mathbf{Q} \times \mathbf{Q} = \{(a, b, c) : a \in \mathbf{Q}, b \in \mathbf{Q}, c \in \mathbf{Q}\}.$$

परिभाषा : दो क्रमित त्रिकों को तब और तभी बराबर, वही अथवा अभिन्न कहा जाता है जब उनके पहिले, दूसरे और तीसरे अंग क्रमशः बराबर हों।

अतः

$$(a, b, c) = (d, e, f) \Leftrightarrow a = d, b = e \text{ और } c = f.$$

प्रश्नावली

1. निम्नलिखित समीकरणों में कौन-से रैखिक हैं और कौन-से नहीं ? वे प्रतिबंध बताइए जो प्रत्येक वर्ग में चर x, y और z पर लगाने पड़ते हैं।

(i) $3x - 2y + 4z - 11 = (x - 5) + (2 - 3y) + (14z + 7)$

(ii) $\frac{x + 2y}{4} + \frac{z - 3}{5} = \frac{2x - 32}{10} + \frac{y}{20}$

(iii) $\frac{x - 3y + 4}{2z - 5} + 5 = 0$ (iv) $\frac{5x + 11y + 13z - 5}{7 - 12y} + 3 = 0$

(v) $\frac{-2x + 4y + z}{5x - 7} + \frac{5}{2} = 0$ (vi) $\frac{3x - 7y + 5z + 22}{y - 2} + \frac{x}{z - 3} = 0$

(vii) $\frac{x - 5y + z}{3y - 8} = 0$ (viii) $\frac{x - 3}{y - 2} + \frac{3z}{2y - 4} + 5 = 0.$

2. बताइए कि दो क्रमित त्रिक अभिन्न हैं अथवा नहीं ।

(*i*) (1, 2, 3), (3 / 3, 6 / 3, 9 / 3) (*ii*) (1, 2, 3), (2, 3, 1)

(*iii*) (1, 2, 3), (1 + 1, 2 + 1, 3 + 1) (*iv*) (1, 2, 3), (1, 4, 3)

(*v*) $(a, b, c), (-a, -b, -c)$ (*vi*) $(a, b, c), (a^2, b^2, c^2)$

(*vii*) $(a, b, c), (a + d, b + d, c + d)$ (*viii*) $(a, b, c), (a, -b, c)$

(*xi*) $(a, b, c), (ad, bd, cd)$ (*x*) $(a, b, c), (a / d, b / d, c / d)$.

[(*v*) से (*x*) तक यह माना गया है कि a, b, c, d विभिन्न अ-शून्य परिमेय संख्याएँ हैं].

3. ऐसे क्रमित त्रिकों के समुच्चयों का वर्णन कीजिए जिनके लिए निम्नलिखित व्यंजक सार्थक नहीं हैं ।

(*i*) $\frac{3x - 4y + 3}{z}$ (*ii*) $\frac{x + y + z - 5}{3x}$

(*iii*) $\frac{x + y - 3z}{y}$ (*iv*) $\frac{y + z}{3 - 5x}$

(*v*) $\frac{y - 2}{x - 5} + \frac{3z + 5}{2y + 3}$ (*vi*) $\frac{1}{z + 5} - \frac{3x + 5}{y - 4}$.

4. निम्नलिखित समीकरणों में से प्रत्येक के कम से कम तीन हल निकालिए ।

(*i*) $x + y + z + 1 = 0$ (*ii*) $3x - 2y + 4z - 11 = 0$

(*iii*) $(2x - 5) + (y + 3) + (7 - 3z) = 0$

(*iv*) $2x - 4y + 3z = x - y + 5z + 7$.

5. ऊपर के प्रश्न (1) के प्रत्येक रैखिक समीकरण के कम से कम दो हल निकालिए ।

47. दो त्रिचरीय रैखिक समीकरण

दो रैखिक समीकरणों

$$ax + by + cz + d = 0 \quad ...(1)$$
$$a'x + b'y + c'z + d' = 0 \quad ...(2)$$

का विचार कीजिए, जिनमें a, b, c, d ; a', b', c', d' सभी परिमेय संख्याएँ हैं और प्रत्येक चर x, y, z, का प्रभाव-क्षेत्र समुच्चय **Q** है । इस भाग में, हम संयुक्त कथन

$$ax + by + cz + d = 0 \quad \text{और} \quad a'x + b'y + c'z + d' = 0$$

का अध्ययन करेंगे, जिसे हम

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0. \end{cases}$$

रूप में भी लिखना स्वीकार करते हैं। उदाहरणों द्वारा हम देखेंगे कि ऐसे निकाय के हलों का अनन्त होना अथवा विद्यमान न होना a, b, c इत्यादि के मानों पर आश्रित है।

उदाहरण 1 :

$$\begin{cases} x - 2y + 5z + 11 = 0 \\ 3x + 4y - 7z + 3 = 0. \end{cases}$$

का सत्य समुच्चय निकालिए।

हल—दत्त निकाय तुल्य है

$$\begin{cases} x - 2y + 5z + 11 = 0 \\ 3x + 4y - 7z + 3 - 3(x - 2y + 5z + 11) = 0 \end{cases} \text{के।}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + 5z + 11 = 0 \\ 10y - 22z - 30 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + 5z + 11 = 0 \\ 5y - 11z - 15 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + 5z + 11 = 0 \\ y = \dfrac{11z + 5}{5}. \end{cases}$$

अब **Q** के अंग-रूप में z को कोई मान c देकर हम y का मान $b = \dfrac{11c+15}{5}$ प्राप्त करते हैं। तब दो समीकरणों में से पहले से हम x का मान

$$a = 2b - 5c - 11.$$

प्राप्त करते हैं।

इस प्रकार समाधान समुच्चय अनन्त है। वास्तव में, यह

$$\left\{\left(a, b, c \right) : b = \frac{11c + 5}{5}, a = 2b - 5c - 11, c \in \mathbf{Q} \right\}.$$

है।

2. $$\begin{cases} 3x - 6y + 9z + 4 = 0 \\ 4x - 8y + 12z + 5 = 0. \end{cases}$$

का सत्य समुच्चय निकालिए।

हल—दत्त निकाय तुल्य है

$$\begin{cases} 4(3x - 6y + 9z + 4) = 0 \\ 3(4x - 8y + 12z + 5) = 0 \end{cases} \text{के।}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4(3x - 6y + 9z + 4) = 0 \\ 3(4x - 8y + 12z + 5) - 4(3x - 6y + 9z + 4) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4(3x - 6y + 9z + 4) = 0 \\ 15 - 16 = 0. \end{cases}$$

किन्तु $15 - 16 = 0$ मिथ्या है, इसलिए संयुक्त कथन

$$4(3x - 6y + 9z + 4) = 0 \quad \text{और} \quad 15 - 16 = 0$$

मिथ्या है। अतः दत्त निकाय का सत्य समुच्चय रिक्त है। हम कहते हैं कि समीकरण असंगत हैं।

प्रश्नावली

1. निम्नलिखित समीकरण-निकायों के कम से कम दो हल निकालिए।

(i) $\begin{cases} x + y + z + 5 = 0 \\ 2x - y + 3z - 7 = 0 \end{cases}$ (ii) $\begin{cases} 2x - 5y - 3z - 11 = 0 \\ 3x + 8y - z + 4 = 0 \end{cases}$

(iii) $\begin{cases} 5x - 2y + 3z - 5 = 0 \\ 3x + 4y - 3z + 2 = 0 \end{cases}$ (iv) $\begin{cases} 4x - y + 3z = 0 \\ 3x + y - 3z + 5 = 0 \end{cases}$

(v) $\begin{cases} 15x - 6y + 9z + 5 = 0 \\ 20x - 8y + 12z + \frac{20}{3} = 0 \end{cases}$ (vi) $\begin{cases} 6x + 3y - 9z + 12 = 0 \\ 4x + 2y - 6z + 8 = 0. \end{cases}$

2. सिद्ध कीजिए कि निम्नलिखित प्रत्येक समीकरण-निकाय का सत्य समुच्चय रिक्त है।

(i) $\begin{cases} x + y - z + 3 = 0 \\ 3x + 3y - 3z + 7 = 0 \end{cases}$ (ii) $\begin{cases} 2x - 3y + 5z - 8 = 0 \\ 6x - 9y + 15z + 5 = 0 \end{cases}$

48. तीन त्रिचरीय रैखिक समीकरण

x, y, z वाले तीन रैखिक समीकरण

$$ax + by + cz + d = 0 \qquad \ldots(1)$$
$$a'x + b'y + c'z + d' = 0 \qquad \ldots(2)$$
$$a''x + b''y + c''z + d'' = 0 \qquad \ldots(3)$$

लीजिए जिन में a, b, c, d; a', b', c', d'; a'', b'', c'', d'' सभी परिमेय संख्याएँ हैं और प्रत्येक चर x, y, z, का प्रभाव-क्षेत्र समुच्चय $\mathbf{Q}$ है। हम संयुक्त कथन

$$ax + by + cz + d = 0 \quad \text{और} \quad a'x + b'y + c'z + d' = 0$$
$$\text{और} \quad a''x + b''y + c''z + d'' = 0.$$

के हल का अध्ययन करेंगे।

हम इस संयुक्त कथन को

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \\ a''x + b''y + c''z + d'' = 0. \end{cases}$$

रूप में लिखना स्वीकार करते हैं।

व्यापक रूप में इसके हल का अध्ययन बहुत उलझाने वाला है, इसलिए हम इसे छोड़ रहे हैं। किन्तु उदाहरणों द्वारा हम देखेंगे कि समीकरण-निकाय के हलों का अद्वितीय होना, अनन्त होना अथवा विद्यमान न होना a, b, c, d इत्यादि के मानों पर आश्रित है।

उदाहरण 1.

$$\begin{cases} x + y + z + 3 = 0 \\ x + 2y + 3z + 6 = 0 \\ x + 3y + 6z + 10 = 0 \end{cases}$$

का सत्य समुच्चय निकालिए ।

हल—दत्त निकाय तुल्य है

$$\begin{cases} x + y + z + 3 = 0 \\ x + 2y + 3z + 6 - (x + y + z + 3) = 0 \\ x + 3y + 6z + 10 - (x + 2y + 3z + 6) = 0 \end{cases}$$ के।

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z + 3 = 0 \\ y + 2z + 3 = 0 \\ y + 3z + 4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z + 3 = 0 \\ x + 2z + 3 = 0 \\ y + 3z + 4 - (y + 2z + 3) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z + 3 = 0 \\ y + 2z + 3 = 0 \\ z + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z + 3 = 0 \\ y + 2(-1) + 3 = 0 \\ z + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z + 3 = 0 \\ y + 1 = 0 \\ z + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + (-1) + (-1) + 3 = 0 \\ y + 1 = 0 \\ z + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 = 0 \\ y + 1 = 0 \\ z + 1 = 0. \end{cases}$$

दत्त समीकरण-निकाय का सत्य समुच्चय

$$\{(-1, -1, -1)\}.$$

है ।

2. $$\begin{cases} x + y + z - 10 = 0 \\ 2x + 3y + 4z - 33 = 0 \\ 3x + 5y + 7z - 56 = 0 \end{cases}$$

का सत्य समुच्चय निकालिए ।

हल—दत्त समीकरण-निकाय तुल्य है

$$\begin{cases} x + y + z - 10 = 0 \\ 2x + 3y + 4z - 33 - 2(x + y + z - 10) = 0 \\ 3x + 5y + 7z - 56 - 3(x + y + z - 10) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z - 10 = 0 \\ y + 2z - 13 = 0 \\ 2y + 4z - 26 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z - 10 = 0 \\ y + 2z - 13 = 0 \\ 2y + 4z - 26 - 2(y + 2z - 13) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z - 10 = 0 \\ y + 2z - 13 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z - 10 = 0 \\ y + 2z - 13 = 0 \end{cases}$$

क्योंकि $0 = 0$ सत्य है।

अब **Q** के अंग-रूप में z को कोई मान देने पर हम ऊपर के दो समीकरणों में से दूसरे द्वारा y का मान निकाल सकते हैं। पहले समीकरण में इन मानों का प्रतिस्थापन x का एक मान देता है। उदाहरण के लिए z का मान 0 हो तो y का मान 13 होगा और x का मान -3 होगा। इस प्रकार दत्त निकाय का एक हल $(-3, 13, 0)$ है। सत्य समुच्चय

$$\{(a, b, c) : a = c - 3, b = 13 - 2c, a, b, c \in \mathbf{Q}\}$$

है।

3.
$$\begin{cases} x - 2y + z + 1 = 0 \\ x - 8y + 3z + 7 = 0 \\ 2x - y + z + 1 = 0 \end{cases}$$

का सत्य समुच्चय निकालिए।

हल—निकाय तुल्य है

$$\begin{cases} x - 2y + z + 1 = 0 \\ x - 8y + 3z + 7 - (x - 2y + z + 1) = 0 \\ 2x - y + z + 1 - 2(x - 2y + z + 1) = 0 \end{cases}$$ के।

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + z + 1 = 0 \\ -6y + 2z + 6 = 0 \\ 3y - z - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + z + 1 = 0 \\ 3y - z - 3 = 0 \\ 3y - z - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + z + 1 = 0 \\ 3y - z - 3 = 0 \\ 3y - z - 3 - (3y - z - 1) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + z + 1 = 0 \\ 3y - z - 3 = 0 \\ -2 = 0. \end{cases}$$

क्योंकि $-2 = 0$ मिथ्या है, इस कारण अपेक्षित सत्य समुच्चय रिक्त है।

टिप्पणी : हम देखते हैं कि समीकरण-निकाय के हल

(i) अद्वितीय

(ii) अनन्त

(iii) अविद्यमान

हो सकते हैं।

तदनुसार हम कहते हैं कि निकाय

(i) संगत (ii) आश्रित (iii) असंगत

है।

प्रश्नावली

1. निम्नलिखित समीकरण निकायों के सत्य समुच्चय निकालिए।

(i) $\begin{cases} 4x - 5y + 6z - 3 = 0 \\ 8x - 7y + 3z + 3 = 0 \\ 7x - 8y + 9z + 6 = 0 \end{cases}$ (ii) $\begin{cases} x + y = 35 \\ y + z = 37 \\ z + x = 42 \end{cases}$

(iii) $\begin{cases} 2x - 5y + 6z + 41 = 0 \\ 5x - 3y + 2z + 22 = 0 \\ 3x - 6y + 4z + 37 = 0 \end{cases}$ (iv) $\begin{cases} 3x + 2y = 34 \\ 3y + 2z = 44 \\ 3z + 2x = 42 \end{cases}$

(v) $\begin{cases} 2x - 3y + z + 1 = 0 \\ 5x - 6y + 3z + 13 = 0 \\ x + z + 11 = 0 \end{cases}$ (vi) $\begin{cases} 2x + 3y + 6z + 1 = 0 \\ 5x + 2y - z + 4 = 0 \\ x + 7y + 19z + 1 = 0 \end{cases}$

(vii) $\begin{cases} 2x + 3y + 4z + 4 = 0 \\ 3x - 2y - 5z + 10 = 0 \\ 5x + 14y + 21z + 6 = 0 \end{cases}$ (viii) $\begin{cases} x + y - z + 7 = 0 \\ 3x - 8y + 7z + 5 = 0 \\ 22y - 50z + 25 = 0. \end{cases}$

2. चर x, y, z का प्रभावक्षेत्र अ-शून्य परिमेय संख्याओं का समुच्चय $\mathbf{Q}_0$ मानकर निम्न-लिखित समीकरण-निकायों के सत्य समुच्चय निकालिए।

(i) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} + 6 = 0 \\ \dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{y} + \dfrac{4}{z} + 8 = 0 \\ \dfrac{3}{x} + \dfrac{4}{y} + \dfrac{6}{z} + 10 = 0 \end{cases}$

(ii) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 3 \\ \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 5 \\ \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{x} = 6 \end{cases}$

(iii) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{y} + 5 = 0 \\ \dfrac{2}{y} + \dfrac{3}{z} + 6 = 0 \\ \dfrac{3}{z} + \dfrac{1}{x} + 5 = 0 \end{cases}$

(iv) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{z} = 1 \\ \dfrac{3}{x} - \dfrac{4}{y} + \dfrac{5}{z} = 9 \\ \dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{y} + \dfrac{4}{z} = 19. \end{cases}$

49. निर्मेय

इस भाग में, हम देखेंगे कि रैखिक समीकरण-निकायों के हल का हमारा ज्ञान गणितीय निर्मेयों को हल करने में कैसे उपयोगी होता है। इसे हम (*i*) संख्याओं (*ii*) समय और कार्य (*iii*) लाभ और हानि (*i*) समय और दूसरी (*iv*) स्कन्ध और अंश (स्टाक और शेयर) के एक-एक उदाहरण द्वारा प्रदर्शित करेंगे।

उदाहरण 1. दो अंकों वाली किसी संख्या के अंकों का योगफल 14 है। अंकों को उलटाने से वह संख्या 18 कम हो जाती है। संख्या निकालिए।

हल—मान लीजिए कि इकाई अंक x है और दहाई अंक y.

तब

$$x + y = 14. \qquad \ldots(1)$$

साथ ही संख्या

$$x + 10y.$$

है। अंकों को उलटाने पर संख्या

$$10x + y$$

हो जाती है।

साथ ही

$$(x + 10y) - (10x + y) = 18. \qquad \ldots(2)$$

इस प्रकार हम समीकरणों (1) और (2) का निकाय प्राप्त करते हैं। परिणाम प्राप्ति के लिए हमें x और y के लिए इस निकाय को हल करना होगा।

वास्तव में ऊपर का निकाय तुल्य है

$$\begin{cases} x + y - 14 = 0 \\ -x + y - 2 = 0 \end{cases} \text{ के ।}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 14 = 0 \\ (-x + y - 2) + (x + y - 14) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 14 = 0 \\ 2y - 16 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 14 = 0 \\ y = 8 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 8 - 14 = 0 \\ y = 8 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 8. \end{cases}$$

अपेक्षित संख्या 86 है ।

2. एक कार्य को तीन पुरुष और चार बालक पाँच दिन में तथा एक पुरुष और 16 बालक चारदिन में समाप्त कर सकते हैं । इस कार्य को एक पुरुष और चार बालक कितने दिन में समाप्त करेंगे ?

हल : मान लीजिए कि अकेला पुरुष कार्य को x दिनों में और अकेला बालक y दिनों में समाप्त कर सकता है । निश्चय ही x और y धनात्मक परिमेय संख्याएँ हैं ।

तब 3 पुरुष और 4 बालक एक दिन में कार्य का

$$\frac{3}{x} + \frac{4}{y}$$

भाग समाप्त करेंगे । क्योंकि कार्य समाप्ति में उन्हें 5 दिन लगते हैं इसलिए

$$5\left(\frac{3}{x} + \frac{4}{y}\right) = 1. \qquad \text{...(1)}$$

इसी प्रकार क्योंकि एक पुरुष और 16 बालक कार्य को 4 दिन में समाप्त करते हैं इसलिए

$$4\left(\frac{1}{x} + \frac{16}{y}\right) = 1. \qquad \text{...(2)}$$

समीककारणों (1) और (2) का निकाय तुल्य है

$$\begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{4}{y} - \frac{1}{5} = 0 \\ \frac{1}{x} + \frac{16}{y} - \frac{1}{4} = 0 \end{cases} \text{ के ।}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{3}{x} + \frac{4}{y} - \frac{1}{5}\right) - 3\left(\frac{1}{x} + \frac{16}{y} - \frac{1}{4}\right) = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \frac{1}{x} + \frac{16}{y} + \frac{1}{4} = 0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \qquad -\frac{44}{y} + \frac{11}{20} = 0 \\ \frac{1}{x} + \frac{16}{y} - \frac{1}{4} = 0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \qquad\qquad \frac{1}{y} = \frac{1}{80} \\ \frac{1}{x} + \frac{16}{y} - \frac{1}{4} = 0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{y} = \frac{1}{80} \\ \frac{1}{x} = \frac{1}{20}. \end{array} \right.$$

अब एक पुरूष और चार बालक एक दिन में कार्य का

$$\frac{1}{20} + \frac{4}{80}$$

भाग समाप्त कर सकेंगे ।

यदि उन्हें कार्य समाप्ति में z दिन लगें तो

$$z\left(\frac{1}{20} + \frac{4}{80}\right) = 1$$

जिसका तुल्य रूप है $\qquad z = 10.$

3. एक घोड़ा और एक गाय 760 रु० में बिके। घोड़े पर 25 प्रतिशत और गाय पर 10 प्रतिशत लाभ हुआ। इन्हें 767·50 रु० में बेचने से घोड़े पर 10 प्रतिशत और गाय पर 25 प्रतिशत लाभ होता। प्रत्येक का क्रय-मूल्य निकालिए।

हल : मान लीजिए कि घोड़े और गाय का क्रय मूल्य क्रमश: x और y रुपए है। पहली स्थिति में इनका विक्रय मूल्य क्रमश:

$$\frac{125}{100}x \text{ अर्थात् } \frac{5}{4}x \qquad \text{और} \qquad \frac{110}{100}y \text{ अर्थात् } \frac{11}{10}y$$

होगा। इस कारण

$$\frac{5}{4}\ x + \frac{11}{10}\ y = 760. \qquad \ldots(1)$$

इसी प्रकार

$$\frac{11}{10}\ x + \frac{5}{4}\ y = 767{\cdot}5 \qquad \ldots(2)$$

अब समीकरणों (1) और (2) का निकाय तुल्य है

$$\begin{cases} 25x + 22y - 15200 = 0 \\ 22x + 25y - 15350 = 0 \end{cases} \text{ के}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 22\ (25x + 22y - 15200) = 0 \\ 25\ (22x + 25y - 15350) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 22\ (25x + 22y - 15200) - 25\ (22x + 25y - 15350) = 0 \\ 22x + 25y - 15350 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -141y + 49350 = 0 \\ 22x + 25y - 15350 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 350 \\ 22x + 25y - 15350 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 350 \\ x = 300. \end{cases}$$

घोड़े का क्रय मूल्य 300 रु० और गाय का 350 रु० है।

4. एक नौका 10 घंटे में जलधारा के प्रतिकूल 30 कि० मी० और अनुकूल 44 कि० मी० जाती है। 13 घंटे में यह धारा के प्रतिकूल और अनुकूल क्रमश: 40 कि० मी० और 55 कि० मी० भी जाती है। जलधारा की और स्थिर जल में नौका की गति निकालिए।

हल: मान लीजिए कि स्थिर जल में नौका की और जलधारा की प्रति घंटा गति क्रमश: u और v कि० मी० है।

तब नौका की जलधारा के प्रतिकूल गति $(u-v)$ कि० मी० प्रति घंटा और जलधारा के अनुकूल $(u+v)$ कि० मी० प्रति घंटा होगी।

क्योंकि पहली स्थिति में 10 घंटे लगते हैं इसलिए

$$\frac{30}{u-v} + \frac{44}{u+v} = 10 \qquad \ldots(1)$$

इसी प्रकार

$$\frac{40}{u-v} + \frac{55}{u+v} = 13. \qquad ...(2)$$

समीकरणों (1) और (2) का निकाय तुल्य है

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4\left(\frac{30}{u-v} + \frac{44}{u+v} - 10\right) = 0 \\ 3\left(\frac{40}{u-v} + \frac{55}{u+v} - 13\right) = 0 \end{cases}$$ के

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4\left(\frac{30}{u-v} + \frac{44}{u+v} - 10\right) = 0 \\ 3\left(\frac{40}{u-v} + \frac{55}{u+v} - 13\right) \\ -4\left(\frac{30}{u-v} + \frac{44}{u+v} - 10\right) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{30}{u-v} + \frac{44}{u-v} - 10 = 0 \\ -\frac{11}{u+v} + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{30}{u-v} + \frac{44}{u+v} - 10 = 0 \\ u+v = 11 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{30}{u-v} + \frac{44}{11} - 10 = 0 \\ u+v = 11 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{30}{u-v} - 6 = 0 \\ u+v = 11 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u - v = 5 \\ u + v = 11 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (u+v) + (u-v) = 5 + 11 \\ u + v = 11 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u = 8 \\ u + v = 11 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u = 8 \\ v = 3. \end{cases}$$

अतः स्थिर जल में नौका की गति 8 कि० मी० प्रति घंटा और जलधारा की गति 3 कि० मी० प्रति घंटा है।

5. एक व्यक्ति ने 6,200 रु० में से कुछ तो 10 प्रतिशत स्कंध में 132 पर और शेष 8 प्रतिशत स्कंध में 99 पर लगाए यदि प्रत्येक विनियोग से प्राप्त आय समान हो तो दोनों विनियोग निकालिए।

हल: कथन '10 प्रतिशत स्कंध 132 पर' का अर्थ यह है कि 100 रु० मूल्य वाले स्कंध को खरीदने के लिए हमें 132 रु० देने पड़ते हैं और तब 132 रु० के इस विनियोग से, वार्षिक आय 10 रु० होगी। इसी प्रकार कथन '8 प्रतिशत स्कंध 99 पर' का अर्थ यह है कि 99 रु० के विनियोग से 100 रु० मूल्य वाला स्कंध प्राप्त करते हैं और तब वार्षिक आय 8 रु० होगी।

मान लीजिए कि उस व्यक्ति ने दो स्कंधों में क्रमशः x रु० और y रु० लगाए।

क्योंकि उसका कुल विनियोग 6,2000 रु० है इसलिए

$$x + y = 6200 \qquad \ldots(1)$$

पुनः क्योंकि दोनों विनियोगों से आय वही है इसलिए

$$\frac{x}{132} \times 10 = \frac{y}{99} \times 8. \qquad \ldots(2)$$

समीकरणों (1) और (2) का निकाय तुल्य है

$$\begin{cases} x + y = 6200 \\ 45x - 48y = 0 \end{cases} \text{ के}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 6200 = 0 \\ 15x - 16y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 6200 = 0 \\ 15x - 16y - 15(x + y - 6200) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 6200 = 0 \\ -31y + 15 \times 6200 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 6200 = 0 \\ y = 3000 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 3000 - 6200 = 0 \\ y = 3000 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 3200 \\ y = 3000. \end{cases}$$

दोनों विनियोग 3,200 रु० और 3,000 रु० होंगे।

प्रश्नावली

1. दो अंकों वाली किसी संख्या के अंकों का योगफल 8 है। संख्या में 18 जोड़ने पर अंक उलट जाते हैं। संख्या निकालिए।

2. दो अंकों वाली किसी संख्या के अंकों का योगफल उस संख्या का एक चौथाई है। अंकों को उलटने पर प्राप्त संख्या दी हुई संख्या से 27 अधिक हो जाती है। संख्या निकालिए।

3. तीन अंकों वाली किसी संख्या के अंकों का योगफल 17 है ; मध्यांक दूसरे दोनों अंकों के योगफल से 1 अधिक है। अंकों का क्रम उलटने से संख्या 396 कम हो जाती है ? संख्या निकालिए।

4. अब से पाँच वर्ष पश्चात् पिता की आयु पुत्र की आयु से तिगुनी होगी। अब से पाँच वर्ष पूर्व पिता की आयु पुत्र की आयु से सात गुनी थी। उनकी वर्तमान आयु निकालिए।

5. एक मनुष्य के पांच पुत्र हैं, पुत्रों की आयु का योगफल पिता की आयु के बराबर है। बारह वर्ष पश्चात् पुत्रों की आयु का योगफल पिता की आयु से दुगुना हो जाएगा। पिता की वर्तमान आयु क्या है ?

6. तीन पुरुष और चार बालक एक कार्य को पाँच दिन में कर सकते हैं तथा दो पुरुष और बारह बालक इसी कार्य को चार दिन में कर सकते हैं। एक पुरुष और दो बालक उसे कितने दिन में करेंगे ?

7. एक पुरुष और एक बालक जितने समय में किसी कार्य को कर सकते हैं उतने ही समय में तीन पुरुष और नौ बालक उस कार्य का चौगुना कर सकते हैं। समान समय में पुरुष और बालक द्वारा किए गए कार्य का अनुपात निकालिए।

8. बीजगणित पुस्तक की चार और ज्यामिति पुस्तक की पाँच प्रतियों का मूल्य 49 रु० है। तथा बीजगणित पुस्तक की सात और ज्यामिति पुस्तक की चार प्रतियों का मूल्य 62 रु० है। प्रत्येक का मूल्य निकालिए।

9. किसी आदमी ने नौ घोड़े और सात गाएँ एक व्यक्ति को 12,000 रु० में बेचीं तथा किसी दूसरे व्यक्ति को उतने ही मूल्य में छः घोड़े और तेरह गाएँ बेची। प्रत्येक का मूल्य क्या था ?

10. एक कि० ग्रा० चाय और तीन कि० ग्रा० चीनी का मूल्य 19·50 रु० है। यदि चीनी का भाव 50 प्रतिशत और चाय का 10 प्रतिशत बढ़ जाए तो उनका मूल्य 23·25 रु० हो जाता है। चाय और चीनी का मूल्य प्रति कि० ग्रा० निकालिए।

11. 75 मीटर लंबी रेलगाड़ी 8 कि० मी० प्रति घंटा की गति से भागने वाले व्यक्ति के पीछे से बराबर आकर 7·5 सै० में उसको पार कर गई। इसके पश्चात यह एक दूसरे व्यक्ति के पीछे से बराबर आकर उसे 6·75 सै० में पार कर गई। दूसरा व्यक्ति किस गति से चल रहा था?

12. एक जलधारा 5 कि० मी० प्रति घंटा की गति से बहती है। एक यंत्र नौका धारा के प्रतिकूल 10 कि० मी० जाकर 50 मिनट में प्रस्थान बिन्दु पर लौट आती है। स्थिर जल में यंत्र नौका की गति निकालिए।

13. अनिल और अजय एक मि० मी० दौड़ते हैं। पहले अनिल अजय को 25 मी० की छूट देकर 51 सैकिन्ड से हराता है। दूसरी बार अनिल अजय को 1 मिनट 15 सैकिन्ड की छूट देता है और 50 मीटर पीछे रह जाता है। अनिल और अजय एक किलोमीटर कितने-कितने समय में दौड़ते हैं?

14. नवीन और सुनील साइकिल द्वारा क से ख तक 55 कि० मी० जाते हैं। नवीन सुनील से 30 मिनट पहले पहुँचता है। तब वे साइकिल से ख से क पर लौटते हैं। सुनील को 4 कि० मी० की छूट देकर नवीन उससे 6 मि० पहले पहुँच जाता है। दोनों की गति कि० मी० प्रति घंटा निकालिए।

15. सुशील किसी गति से चलकर कोई दूरी पार करता है। यदि वह $\frac{1}{2}$ कि० मी० प्रति घंटा तेज चलता तो उसे 15 मि० कम लगते। किन्तु यदि वह 1 कि० मी० प्रति घंटा धीमा चलता तो उसे 45 मि० अधिक लगते। दूरी और सुशील की गति निकालिए।

16. राम और श्याम की आय बराबर है। राम अपनी आय का एक-पंचमांश बचाता है। किन्तु राम की अपेक्षा प्रति वर्ष 1000 रु० अधिक व्यय करने से श्याम पर 4 वर्ष के अंत में 2,000 रू० का ऋण हो जाता है। प्रत्येक की वार्षिक आय क्या हुई?

17. 1550 रू० की राशि का कुछ भाग 7·5 प्रतिशत और शेष 12 प्रतिशत साधारण ब्याज पर दिया गया। तीन वर्ष के पश्चात् कुल ब्याज 450 रू० प्राप्त हुआ। पृथक्-पृथक् ब्याज पर दी गई राशियाँ बताइए।

18. एक व्यक्ति 6750 रू० का कुछ भाग 12 प्रतिशत स्कंध में 140 पर और शेष 10 प्रतिशत स्कंध में 125 पर लगाता है। यदि उसकी कुल आय 560 रू० हो तो दोनों विनियोग निकालिए।

19. एक व्यक्ति 7 प्रतिशत स्कंध में $103\frac{1}{2}$ पर और 8 प्रतिशत स्कंध में 105 पर बराबर-बराबर धनराशि लगाता है। पहले विनियोग से उसकी आय दूसरे की आय से 186 रू० अधिक है। दोनों विनियोग क्या थे ?

20. एक व्यक्ति 21,000 रू० 15 प्रतिशत स्कंध में 143 पर और $10\frac{1}{2}$ प्रतिशत स्कंध में 91 पर इस प्रकार लगाना चाहता है कि दोनों से उसकी आय बराबर हो। ऐसा वह किस प्रकार करे ?

संक्षेप

समीकरणों में आने वाले प्रत्येक चर का प्रभाव-क्षेत्र समुच्चय **Q** और समीकरणों में आने वाले गुणांकों को **Q** के अंग मानकर निम्नलिखित परिणाम प्राप्त होते हैं।

(1) रैखिक समीकरण

$$ax + b = 0, a \neq 0,$$

का हल

$$-\frac{b}{a}$$

अद्वितीय होता है।

(2) समीकरण

$$\begin{cases} ax + b = 0 & a \neq 0 \\ cx + d = 0 & c \neq 0 \end{cases}$$

तब और तभी संगत हैं जब

$$ad = bc.$$

(3) a और b दोनों के एक साथ शून्य न होने पर, समीकरण

$$ax + by + c = 0$$

का सत्य समुच्चय अनन्त होता है।

(4) निकाय

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$

के हल (*i*) अद्वितीय (*ii*) अनन्त (*iii*) अविद्यमान तभी होते हैं जब क्रमश:

(*i*) $ab' \neq a'b$ (*ii*) $ab' = a'b, ac' = a'c$ (*iii*) $ab' = a'b, ac' \neq a'c.$

अनरूपत: हम कहते हैं कि निकाय

(*i*) संगत (*ii*) आश्रित (*iii*) असंगत

है।

(5) a, b, c के एक साथ शून्य न होने पर

$$ax + by + cz + d = 0$$

का सत्य समुच्चय अनन्त होता है।

(6) निकाय

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

का सत्य समुच्चय अनन्त या रिक्त हो सकता है।

(7) निकाय

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y \; c'z + d' = 0 \\ ax'' + b''y + c''z + d'' = 0 \end{cases}$$

के हलों का

(*i*) अद्वितीय होना (*ii*) विद्यमान न होना (*iii*) अनन्त होना गुणांकों के मानों पर निर्भर होता है।

सिंहावलोकन प्रश्नावली

1. निम्नलिखित समीकरण-निकाय हल कीजिए :

(*i*) $\begin{cases} 13x + 12y - 13 = 0 \\ 12x + 13y - 12 = 0 \end{cases}$ (*ii*) $\begin{cases} 5x + 4y - 22 = 0 \\ 4x - 5y + 7 = 0 \end{cases}$

(*iii*) $\begin{cases} 7x - 11y + 3 = 0 \\ 2x + 5y - 8 = 0 \end{cases}$ (*iv*) $\begin{cases} 2x - 4y + 8 = 0 \\ 3x - 6y + 9 = 0 \end{cases}$

(*v*) $\begin{cases} 21x + 25y - 13 = 0 \\ 4x - 3y + 5 = 0 \end{cases}$ (*vi*) $\begin{cases} 4x - 6y + 12 = 0 \\ 15y - 10y - 30 = 0 \end{cases}$

2. निम्नलिखित में से कौन-से समीकरण निकाय संगत हैं और कौन-से नहीं ?

(*i*) $\begin{cases} 2x - 3y + 5 = 0 \\ 7x + 2y - 9 = 0 \\ x + 36y - 77 = 0 \end{cases}$ (*ii*) $\begin{cases} x + y + 11 = 0 \\ 2x + 4y - 14 = 0 \\ 2x + 5y + 12 = 0 \end{cases}$

$$(iii) \begin{cases} 3x - 4y + 13 = 0 \\ 4x - 2y + 5 = 0 \\ 22x + 31y - 7 = 0 \end{cases} \qquad (iv) \begin{cases} 5x + 4y - 3 = 0 \\ 2x - 5y + 4 = 0 \\ 3x - 24y + 19 = 0 \end{cases}$$

3. प्रत्येक चर का प्रभाव-क्षेत्र अ-शून्य परिमेय संख्याओं का समुच्चय **Q** मान कर निम्नलिखित समीकरण निकाय हल कीजिए।

$$(i) \begin{cases} \dfrac{2}{x} - \dfrac{3}{y} = 5 \\[2mm] \dfrac{5}{x} + \dfrac{2}{y} = 3 \end{cases} \qquad (ii) \begin{cases} \dfrac{4}{3x} + \dfrac{5}{4y} = \dfrac{1}{2} \\[2mm] \dfrac{1}{2x} + \dfrac{7}{3y} = \dfrac{3}{5}. \end{cases}$$

4. $a \neq b$ मान कर निकाय

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ ax + by = c \\ a^2x + b^2y = c^2. \end{cases}$$

का संगति-प्रतिबंध निकालिए।

5. निम्नलिखित समीकरण-निकाय हल कीजिए।

$$(i) \begin{cases} x - 2y + 3z + 4 = 0 \\ 2x + 5y - 8z - 7 = 0 \\ 5x + 23y - 36z - 37 = 0 \end{cases} \qquad (ii) \begin{cases} 2x - 5y + 3z - 8 = 0 \\ 4x + 3y - 11z + 5 = 9 \\ 13y - 17z - 21 = 0 \end{cases}$$

$$(iii) \begin{cases} 2x = 3 \\ 3x - 7y = 10 \\ 9x + 8y - 7z = 2 \end{cases} \qquad (iv) \begin{cases} -3x + 4y - 5z = 0 \\ x + 2y - 9z + 4 = 0 \\ 13x - 7y - z + 11 = 0 \end{cases}$$

6. चरों का प्रभाव-क्षेत्र Q_0 मान कर निम्नलिखित समीकरण-निकाय हल कीजिए।

$$(i) \begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} - 4 = 0 \\[2mm] \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} - 6 = 0 \\[2mm] \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{x} - 8 = 0 \end{cases} \qquad (ii) \begin{cases} \dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{y} - 5 = 0 \\[2mm] \dfrac{3}{y} + \dfrac{4}{z} - 6 = 0 \\[2mm] \dfrac{4}{z} + \dfrac{2}{x} - 5 = 0 \end{cases}$$

7. दो अंकों वाली किसी संख्या के अंकों का योगफल 10 है। अंकों को उलटने पर प्राप्त संख्या दी हुई संख्या से 36 अधिक हो जाती है। संख्या निकालिए।

8. आशा उषा से कहती है, "मुझे 900 रुपए दे दो तो मेरे पास तुम्हारे पास बचे रुपयों से दुगुने हो जाएँगे।" ऊषा उत्तर देती है, यदि तुम मुझे 100 रुपए दे दो तो मेरे पास तुम्हारे पास बचे रुपयों से तिगुने हो जाएँगे।" दोनों के पास कितने-कितने रुपए है ?

9. एक भिन्न के अंश में 1 जोड़ने पर भिन्न $\frac{3}{4}$ हो जाता है। किन्तु $\frac{2}{3}$ से गुणा करने पर वह $\frac{1}{4}$ हो जाता है। भिन्न निकालिए।

10. क और ख किसी कार्य को मिलकर $1\frac{4}{5}$ दिन में समाप्त कर सकते है। क के $2\frac{1}{2}$ दिन और ख के $\frac{3}{4}$ दिन कार्य करने पर भी वह समाप्त हो जाता है। दोनों को कार्य-समाप्ति में पृथक्-पृथक् कितना समय लगेगा।

11. तीनों नलों को एक साथ खोल देने से एक जलाशय 12 घंटे में भर जाता है। एक नल उसे 10 घंटे में और दूसरा 15 घंटे में भर सकत है। तीसरे नल का प्रयोजन बताइए।

12. एक व्यापारी 30,000 रू० में दो कारें खरीदता है। वह एक को 20 प्रतिशत और दूसरी को 8 प्रतिशत लाभ पर बेचता है। यदि कुल लाभ 15 प्रतिशत हो तो प्रत्येक कार का क्रय मूल्य निकालिए।

13. एक व्यक्ति कुछ संतरे 50 पैसे के 3 और दूसरी प्रकार के कुछ 25 पैसे के दो के हिसाब से खरीदता है। इस प्रकार वह कुल 36 रुपये देता है। वह 16 संतरे निकाल कर शेष सभी को बीस-बीस पैसे में बेच देता है। इस प्रकार उसे 8·8 रुपये लाभ होता है। उसने दोनों प्रकार के कितने-कितने संतरे खरीदे ?

14. पिता की आयु पुत्र की आयु के तिगुने से 3 वर्ष अधिक है। अब से तीन वर्ष पश्चात् पिता की आय पुत्र की आयु के दुगुने से 10 वर्ष अधिक होगी। उनकी वर्तमान आयु निकालिए।

15. मोहन और सोहन की वर्तमान आय का योगफल 63 वर्ष है। साथ ही मोहन की वर्तमान आयु सोहन की उस समय की आयु से दुगुनी है जब मोहन की आयु सोहन की वर्तमान आयु के बराबर थी। उन की आयु निकालिए।

16. जलधारा के अनुकूल बहते हुए एक नौका 45 मिनट में 6 कि० मी० दूरी पार करती है। किन्तु धारा के प्रतिकूल वापिस आने में उसे $1\frac{1}{2}$ घंटे लगते हैं। धारा की और स्थिर जल में नौका की गति निकालिए।

17. 600 कि० मी० की यात्रा का कुछ भाग रेलगाड़ी द्वारा और कुछ भाग कार द्वारा पार किया जाता है। 120 कि० मी० रेल द्वारा और शेष भाग कार द्वारा पार करने पर कुल समय 8 घंटे लगता है किन्तु 200 कि० मी० रेल द्वारा और शेष भाग कार द्वारा पार करने पर 20 मिनट अधिक लगते हैं। रेल और कार की गतियां निकालिए।

18. आयोडीन के दो घोल 8 प्रतिशत और 24 प्रतिशत गाढ़े हैं। 12 प्रतिशत गाढ़े घोल के 80 घ० से० मी० प्राप्त करने के लिए प्रत्येक घोल की कितनी कितनी मात्रा मिलानी पड़ेगी ?

19. एक व्यक्ति 14,970 रुपये का कुछ भाग 6 प्रतिशत स्कंध में 90 पर और शेष $6\frac{1}{2}$ प्रतिशत स्कंध में 97 पर लगाता है। यदि उसकी कुल आय 1000 रुपये हो तो बताइए कि उसने प्रत्येक स्कंध कितना-कितना खरीदा।

20. एक मनुष्य के पास 8370 रूपये हैं। इस राशि का कुछ भाग वह 9 प्रतिशत स्कंध में 96 पर और शेष 12 प्रतिशत स्कंध में 120 पर लगाता है। यदि दोनों विनियोगों से प्राप्त आय बराबर-बराबर हो तो प्रत्येक विनियोग निकालिए।

6

द्विघात-समीकरण

50. भूमिका

अध्याय 5 की भाँति, इस अध्याय में भी, चरों का प्रभाव-क्षेत्र परिमेय संख्याओं का समुच्चय **Q** ही होगा और संख्याएँ भी परिमेय ही होंगी। अन्यथा होने पर विशेष उल्लेख कर दिया जाएगा।

बीजीय व्यंजक

$$2x+3,\ 3xy^2,\ xy+x,\ 3x^2-2x+5,\ x^2+3xy+y^2,\ 3x^4+2x^2-3x+7$$

का विचार कीजिए। इनमें से प्रत्येक का निर्माण परिमेय संख्याओं के साथ चरों के योग और गुणन की कुछ संक्रियाओं द्वारा होता है। ये व्यंजक तथाकथित **बहुपदों** के उदाहरण हैं।

परिभाषा—**Q** में कोई बहुपद एक ऐसा बीजीय व्यंजक है जिसका निर्माण परिमेय संख्याओं के साथ चरों के योग और गुणन की कुछ संक्रियाओं द्वारा होता है। किसी बहुपद में किसी भी चर का घातांक अनिवार्यतः अ-ऋणात्मक पूर्ण संख्या होता है।

उदाहरणार्थ,

$$2x^2+3{\cdot}5x+y,\ 3x^3-5x^2+4x+7$$

तो बहुपद हैं किन्तु

$$\frac{x}{y}+3$$

बहुपद नहीं है क्योंकि x/y में चर y का घातांक ऋणात्मक पूर्ण संख्या -1 है।

बहुपद का सरलतम रूप एकपद है जो या तो कोई संख्यांक या चर या एक संख्यांक के साथ एक अथवा अनेक चरों के गुणन का फल होता है।

इस प्रकार

$$5x^2, -3{\cdot}5x,\ 7xy^3$$

एकपदों के कुछ उदाहरण हैं। अतः किसी बहुपद को कुछ एकपदों का योगफल भी समझा जा सकता है। एकपदों के योगफल रूप बहुपद के प्रत्येक एकपद को बहुपद का पद कहते हैं। दो पदों वाले बहुपद को द्विपद और तीन पदों वाले बहुपद को त्रिपद कहते हैं।

प्रश्नावली

निम्नलिखित बहुपदों में से कौन-से एकपद, कौन-से द्विपद और कौन-से त्रिपद हैं।

(i) $x+1$ (ii) $8x^2-5x+1$

(iii) $\frac{12}{5}xy$ (iv) $7+3{\cdot}4$

(v) $3(x+y)$ (vi) $8xy+y+2x$

(vii) 3 (viii) $5x^2+1$

(ix) $x+y+z$

प्रस्तुत अध्याय में हम केवल एक चरीय बहुपदों का ही अध्ययन करेंगे।

परिभाषा—Q में एक चर वाला बहुपद

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots\cdots\cdots+a_rx^{n-r}+\cdots\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n$$

रूप वाला बीजीय व्यंजक होता है। यहाँ

$$a_0\ ,\ a_1\ ,\ a_2\ ,\ \cdots\cdots\ a_r\ ,\ \cdots\cdots,\ a_n$$

दत्त परिमेय संख्याएँ हैं, $a_0\neq 0_1$ n कोई धन-संख्या है और x का प्रमात्र-क्षेत्र $\mathbf{Q}$ है। संख्याओं $a_0, a_1, a_2\cdots,$ a_{n-1} को क्रमश :

$$x^n\ ,\ x^{n-1}\ ,\ x^{n-2}\ ,\ \cdots\cdots,x$$

का गुणांक कहते हैं। a_n को बहुपद का अचरपद और n को इसका घात कहते हैं। साथ ही, महत्तम घात वाले पद का गुणांक 1 होने पर बहुपद एक गुणांकी कहलाता है।

उदाहरणार्थ,

(i) $2x+5$ (ii) $7x^2+5x-3$ (iii) x^3-2x+1

x के क्रमशः एक, दो और तीन घात वाले बहुपद हैं। इनमें से (iii) तो एक गुणांकी है परन्तु (i) और (ii) नहीं हैं।

एक घात वाले बहुपद को रैखिक बहुपद भी कहते हैं। साथ ही दो घात वाले बहुपद को द्विघात बहुपद कहते हैं।

यह ध्यान देना उचित होगा कि एक अज्ञात वाले रैखिक समीकरणों और रैखिक असमताओं के अध्ययन में हमारा संबंध रैखिक बहुपदों के साथ था। चर x वाले रैखिक बहुपद का व्यापक रूप

$$ax+b$$

है। यहाँ a और b दत्त परिमेय संख्याएँ हैं और $a\neq 0.$ हम देख चुके हैं कि एक अज्ञात x वाला रैखिक समीकरण एक ऐसा खुला कथन है जो

$$ax+b=0$$

रूप वाले खुले कथन के तुल्य है। यहाँ a, b, दत्त परिमेय संख्याएँ हैं और $a \neq 0$. साथ ही एक अज्ञात वाली रैखिक असमता एक ऐसा खुला कथन है जो

(*i*) $ax+b>0$	(*ii*) $ax+b<0$
(*iii*) $ax+b \geqslant 0$	(*iv*) $ax+b \leqslant 0$

में से किसी एक रूप वाले खुले कथन के तुल्य है। यहाँ भी a, b दत्त परिमेय संख्याएँ हैं और $a \neq 0$.

इस अध्याय में, हम ऐसे खुले कथनों का अध्ययन करेंगे जो

(*i*) $ax^2+bx+c=0$	(*ii*) $ax^2+bx+c>0$
(*iii*) $ax^2+bx+c<0$	(*iv*) $ax^2+bx+c \geqslant 0$
(*v*) $ax^2+bx+c \leqslant 0$,	

रूप वाले खुले कथनों के तुल्य हों। यहाँ a, b, c दत्त परिमेय संख्याएँ हैं और $a \neq 0$.

अतः इस इस अध्याय में, हमारा संबंध

$$ax^2+bx+c$$

रूप वाले द्विघात बहुपदों से होगा, जिनमें a, b, c कोई संख्याएँ हैं और $a \neq 0$ तथा चर x का प्रभाव-क्षेत्र परिमेय संख्याओं का समुच्चय **Q** है।

निस्संदेह हम किसी चर को वर्ण x द्वारा सूचित करने के स्थान पर y, u, v, t जैसे किसी अन्य वर्ण द्वारा सूचित कर सकते हैं।

टिप्पणी : यह संभव है कि द्विघात बहुपद में x का गुणांक अथवा अचर पद शून्य हो।

प्रश्नावली

1. निम्नलिखित बहुपदों के गुणांक और अचर पद दीजिए। प्रत्येक का घात भी बताइए।

(*i*) $2x+7$	(*ii*) $-2x+5$
(*iii*) $-3x$	(*iv*) $\cdot 5y+\cdot 7$
(*v*) $-1\cdot 5y+2$	(*vi*) $7y$
(*vii*) $-2x^2+7$	(*viii*) $\cdot 5x^2-7x+8$
(*ix*) $\cdot 7x^2+x$	(*x*) $3y^2-2y+1$
(*xi*) $\frac{5}{2}y^2+y-3$	(*xii*) $-8y^2$
(*xiii*) t^2+t-1	(*xiv*) $-2t^2+\frac{5}{3}t$
(*xv*) $3t^2-7$	(*xvi*) x^3+7x^2-3x+5
(*xvii*) $2x^4-2x+5$	(*xviii*) x^7-1

2. ऊपर के प्रश्न 1 में कौन-से बहुपद एक गुणांकी हैं ?

3. प्रत्येक के गुणांकों और अचर पदों सहित कोई पाँच द्विघात बहुपद लिखिए। उनमें से कौन-से एक गुणांकी हैं।

4. दो ऐसे त्रिघात-बहुपद लिखिए जो एक गुणांकी हों। प्रत्येक के गुणांक और अचर पद भी बताइए।

5. पाँच घात वाला एक बहुपद लिखिए। इसके गुणांक और अचर पद भी बताइए।

51. दो रैखिक बहुपदों का गुणनफल

यह ध्यान देना महत्त्वपूर्ण है कि एक ही चर वाले दो रैखिक बहुपदों का गुणनफल एक द्विघात बहुपद होता है।

दो रैखिक बहुपद

$$ax+b,\ cx+d;\ a\neq 0,\ c\neq 0$$

लीजिए।

वितरण नियम और योग एवं गुणन के क्रम-विनिमेय तथा साहचर्य-नियम का बारंबार प्रयोग करके हम

$$\begin{aligned}(ax+b)\ (cx+d) &= ax\ (cx+d)+b\ (cx+d)\\ &= ax\ cx+axd+bcx+bd\\ &= acx^2+(ad+bc)\ x+bd\end{aligned}$$

प्राप्त करते हैं।

साथ ही हम देखते हैं कि

$$a\neq o \text{ और } c\neq o \Rightarrow ac\neq 0.$$

इस प्रकार पद acx^2 के गुणांक ac के शून्य न होने के कारण गुणनफल द्विघात बहुपद है।

टिप्पणी : हमें ध्यान देना चाहिए कि समता

$$(ax+b)\ (cx+d)=acx^2+(ad+bc)\ x+bd$$

सत्य है $\forall x\in \mathbf{Q}$.

प्रश्नावली

1. रैखिक समीकरणों के निम्नलिखित गुणनफलों को द्विघात बहुपदों के रूप में व्यक्त कीजिए।

(i) $(x+1)\ (x+2)$	(ii) $(x-2)\ (x+3)$
(iii) $(x-4)\ (x-7)$	(iv) $(2x+1)\ (x+2)$
(v) $(2x+3)\ (3x+2)$	(vi) $(5x-7)\ (6x+11)$
(vii) $(x+4)\ (3x-1)$	(viii) $(-2x+1)\ (x-7)$
(ix) $(3x+4)\ (x-2)$	(x) $(2-3t)\ (3t+1)$
(xi) $(5-4t)\ (5+4t)$	(xii) $(2-t)\ (2t+5)$.

2. a, b, p, q, l, m के परिमेय संख्याएँ होने पर निम्नलिखित गुणनफलों को द्विघात बहुपदों के रूप में व्यक्त कीजिए।

(*i*) $(x+a)(x+b)$ (*ii*) $(x-2p)(x+3q)$ (*iii*) $(y+l)(y-5m)$.

3. एक ही चर वाले रैखिक बहुपदों के कोई पाँच युग्म लिखिए और प्रत्येक युग्म के गुणनफल को द्विघात बहुपद के रूप में प्राप्त कीजिए।

किसी एक गुणांकी रैखिक बहुपद का वर्ग—

ऊपर के प्रश्न 1 और 2 में हम देख सकते हैं कि दो एक गुणांकी रैखिक बहुपदों का गुणनफल एक गुणांकी द्विघात बहुपद है। दो रैखिक बहुपदों के गुणनफल के विशेष उदाहरण-रूप में किसी एक गुणांकी रैखिक बहुपद के वर्ग को लीजिए। किसी एक गुणांकी रैखिक बहुपद का रूप

$$x+p$$

होता है जिसमें p कोई परिमेय संख्या है। अब

$$\begin{aligned}(x+p)^2 &= (x+p)(x+p)\\ &= x(x+p)+p(x+p)\\ &= (x^2+xp)+(px+p^2)\\ &= x^2+2px+p^2.\end{aligned}$$

हम देखते हैं कि अचर पद p^2 और x का गुणांक $2p$ है। अतः किसी एक गुणांकी रैखिक बहुपद का वर्ग एक गुणांकी द्विघात बहुपद होता है, इसमें अचर पद x के गुणांक के आधे का वर्ग होता है।

विलोमतः यदि किसी एक गुणांकी द्विघात बहुपद में अचर पद x के गुणांक के आधे का वर्ग हो तो वह बहुपद किसी एक गुणांकी रैखिक बहुपद का वर्ग होता है।

उदाहरणार्थ—निम्नलिखित में से प्रत्येक एक गुणांकी द्विघात बहुपद उक्त प्रतिबंध का समाधान करता है।

(*i*) x^2+4x+4 (*ii*) $x^2+2bx+b^2$

(*iii*) $x^2+3x+\frac{9}{4}$ (*iv*) $x^2-5x+\frac{25}{4}$

(*v*) $x^2-lx+\frac{1}{4}l^2$ (*vi*) x^2-6x+9

और ये क्रमशः निम्नलिखित एक गुणांकी रैखिक बहुपदों के वर्ग हैं :

(*i*) $x+2$ (*ii*) $x+b$

(*iii*) $x+\frac{3}{2}$ (*iv*) $x-\frac{5}{2}$

(*v*) $x-\frac{l}{2}$ (*vi*) $x-3$.

अब, हम एक गुणांकी द्विघात बहुपद

$$x^2+lx+\ldots$$

का विचार करते हैं जिसमें अचर पद ज्ञात नहीं है। यदि बहुपद रैखिक बहुपद का वर्ग हो तो इस अचर पद को अद्वितीय रूप मे निर्धारित किया जा सकता है। अतः x के गुणांक के आधे का वर्ग होने के कारण अव्यक्त पद

$$\left(\frac{l}{2}\right)^2 \text{ अर्थात् } \frac{l^2}{4}$$

होगा और इसके अचर पद होने से बहुपद वर्ग होगा

$$x+\frac{l}{2}$$

का। तब

$$x^2+lx+\frac{l^2}{4}=\left(x+\frac{l}{2}\right)^2.$$

प्रश्नावली

1. निम्नलिखित में से प्रत्येक किसी रैखिक बहुपद का वर्ग है। अव्यक्त पद बताइए।

(i) $x^2-4x+\ldots$ (ii) $x^2+3x+\ldots$

(iii) $x^2-2ax+\ldots$ (iv) $x^2-x+\ldots$

(v) $x^2-5x+\ldots$ (vi) $x^2+\frac{b}{a}x+\ldots$

(vii) $x^2-\frac{1}{2}x+\ldots$ (viii) $x^2+\frac{7}{4}x+\ldots$

(ix) $x^2-\frac{9}{11}x+\ldots$.

प्रत्येक वर्ग में अनुरूप रैखिक बहुपद भी दीजिए।

2. निम्नलिखित में से प्रत्येक किसी रैखिक बहुपद का वर्ग है। प्रत्येक वर्ग में संख्या k क्या है? l, m दत्त परिमेय संख्याएँ हैं।

(i) $x^2+2x+(2+k)$ (ii) $x^2-3x+(7-k)$

(iii) $x^2+6x+\left(\frac{2}{3}+k\right)$ (iv) $x^2+5x+(2+k)$

(v) $x^2+lx+(m+k)$ (vi) $x^2+2lx+(m-k)$.

3. निम्नलिखित में से प्रत्येक किसी रैखिक बहुपद का वर्ग है। अव्यक्त पद बताते हुए प्रत्येक वर्ग में अनुरूप रैखिक बहुपद दीजिए।

(i) $x^2+\ \dots\ +9$ (ii) $x^2+\ \dots\ +\frac{9}{4}$.

4. k के ऐसे मान निकालिए जिनके लिए निम्नलिखित में से प्रत्येक किसी रैखिक बहुपद का वर्ग हो जाए। यहाँ l, m दत्त परिमेय संख्याएँ हैं।

(i) $x^2+(2+k)x+4$ (ii) $x^2+(5-k)\,x+\frac{9}{25}$

(iii) $x^2+(l+k)x+m^2$ (iv) $x^2+(k-m)\,x+\frac{l^2}{4}$.

52. द्विघात बहुपद के रैखिक खंड

यह देखने के पश्चात् कि एक ही चर वाले दो रैखिक बहुपदों का गुणनफल द्विघात बहु-पद होता है, अब हम किसी दत्त द्विघात बहुपद को दो रैखिक बहुपदों के गुणनफल के रूप में व्यक्त करने की प्रतिलोम समस्या का विचार करेंगे।

हम यह देखेंगे कि परिमेय गुणांकों वाले प्रत्येक द्विघात बहुपद को परिमेय गुणांकों वाले दो रैखिक बहुपदों के गुणनफल के रूप में व्यक्त नहीं किया जा सकता। वास्तव में प्रत्येक द्विघात बहुपद को रैखिक बहुपदों के रूप में व्यक्त कर सकने के लिए हमें परिमेय संख्याओं के समुच्चय को वास्तविक संख्याओं के और सम्मिश्र संख्याओं के समुच्चय तक विस्तृत करना होगा। बीजगणित II में विस्तार का यह कार्यक्रम हमारा ध्यान आकृष्ट करेगा।

अब हम ऐसे प्रतिबंध प्राप्त करेंगे जिनके सत्य होने पर परिमेय गुणांकों वाले द्विघात बहुपद को परिमेय गुणांकों वाले रैखिक बहुपदों के गुणनफल के रूप में व्यक्त किया जा सके। निस्संदेह हम उन द्विघात बहुपदों को रैखिक बहुपदों के गुणनफलों के रूप में व्यक्त करना भी सीखेंगे, जिन्हें इस प्रकार व्यक्त किया जा सकता है।

यह भी देखा जाएगा कि द्विघात बहुपद की रैखिक बहुपदों के गुणनफल के रूप में अभिव्यक्ति में द्विघात समीकरणों के और असमताओं के सत्य समुच्चयों के निर्धारण की विधि भी निहित है।

हम कहते हैं कि रैखिक बहुपद

$$lx+m, \qquad l,\ m\in\mathbf{Q},\ l\neq 0$$

द्विघात बहुपद

$$ax^2+bx+c,\ a,\ b,\ c,\in\mathbf{Q},\ a\neq 0$$

का खंड तब है जब ऐसा रैखिक बहुपद

$$px+q, \quad p,\ q\in\mathbf{Q}, \quad p\neq 0$$

विद्यमान हो जिसके लिए

$$ax^2+bx+c=(lx+m)\ (px+q),\ \forall x\in\mathbf{Q}.$$

द्विघात बहुपद के खंडनीय होने का प्रतिबंध

प्रमेय—द्विघात बहुपद

$$ax^2+bx+c=0,\ a,\ b,\ c \in Q,\ a \neq 0$$

परिमेय गुणांकों वाले दो रैखिक बहुपदों के गुणनफल के रूप में तब और तभी व्यक्त हो सकता है जब

$$b^2-4ac$$

किसी परिमेय संख्या का वर्ग हो।

उपपत्ति—मान लीजिए कि

$$b^2-4ac$$

किसी परिमेय संख्या का वर्ग है।

a के अ-शून्य होने पर

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right).$$

अब

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}$$

ऐसा एक गुणांकी है जिसमें x का गुणांक b/a है। और x के इस गुणांक के आधे का वर्ग

$$\left(\frac{b}{2a}\right)^2, \text{ अर्थात् } \frac{b^2}{4a^2}$$

है।

पुनः

$$\begin{aligned}x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a} &= \left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}\right)+\left(\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right).\\ &= \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\\ &= \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}.\end{aligned}$$

हमने मान लिया है कि b^2-4ac किसी परिमेय संख्या का वर्ग है। यदि यह परिमेय संख्या k हो तो

$$k^2=b^2-4ac.$$

अतः

$$\begin{aligned}ax^2+bx+c &= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{k^2}{4a^2}\right]\\ &= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{k}{2a}\right)^2\right]\end{aligned}$$

$$= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)+\frac{k}{2a}\right]\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)-\frac{k}{2a}\right]$$
$$= a\left(x+\frac{b+k}{2a}\right)\left(x+\frac{b-k}{2a}\right)$$
$$= \left(ax+\frac{b+k}{2}\right)\left(x+\frac{b-k}{2a}\right).$$

इस प्रकार हमने यह सिद्ध कर लिया कि द्विघात बहुपद

$$ax^2+bx+c,\ a,\ b,\ c \in Q\ ,a\neq 0$$

परिमेय गुणांकों वाले दो रैखिक खण्डों के गुणनफल के रूप में तब व्यक्त किया जा सकता है जब

$$b^2-4ac$$

किसी परिमेय संख्या का वर्ग हो।

विलोमतः अब हम यह सिद्ध करेंगे कि यदि ax^2+bx+c को दो रैखिक खण्डों के गुणनफल के रूप में व्यक्त किया जा सकता हो तो b^2-4ac अनिवार्यतः किसी परिमेय संख्या का वर्ग होगा।

मान लीजिए कि ax^2+bx+c खंडों $lx+m$, $px+q$ का गुणनफल है।

तब

$$ax^2+bx+c=(lx+m)\ (px+q).$$

साथ ही

$$(lx+m)\ \ (px+q)=lpx^2+(lp+mp)x+mq.$$

इस कारण

$$a=lp,\ \ b=lq+mp,\ c=mq.$$

परिणामतः

$$\begin{aligned} b^2-4ac &= (lq+mp)^2-4\ lpmq \\ &= l^2q^2+m^2p^2+2lmpq-4lpmq \\ &= l^2q^2+m^2p^2-2lmpq \\ &= (lq-mp)^2 \end{aligned}$$

और इसलिए b^2-4ac परिमेय संख्या $lq-mp$ का वर्ग है।

अतः प्रमेय सिद्ध हुआ।

उदाहरण

निम्नलिखित द्विघात बहुपदों का विचार कीजिए :

(*i*) $6\ x^2-7x-3$ (*ii*) $2x^2+x-5$

(*iii*) $12x^2-x-6$ (*iv*) $3x^2+x+8$

(*v*) x^2+4 (*vi*) $8x^2+10x-3$

(*vii*) $4x^2-12x+9$

(i) $a=6,\ b=-7,\ c=-3.$

$$b^2-4\,ac=(-7)^2-4(6)\ (-3)=121=11^2.$$

और इसलिए $b^2-4\,ac$ परिमेय संख्या 11 का वर्ग है।

(ii) $a=2,\ b=1,\ c=-5.$

$$b^2-4ac=1^2-4\ (2)\ (-5)=41,$$

और इसलिए कोई ऐसी परिमेय संख्या नहीं है जिसका वर्ग परिमेय संख्या $b^2-4\,ac$ अर्थात् 41 हो।

(iii) $a=12,\ b=-1,\ c=-6.$

$$b^2-4\,ac=(-1)^2-4(12)\ (-6)=289=17^2,$$

इसलिए b^2-4ac परिमेय संख्या 17 का वर्ग है।

(iv) $a=3,\ b=1,\ c=8.$

$$b^2-4ac=1^2-4\ (3)\ (8)=\ -95.$$

इसलिए b^2-4ac किसी परिमेय संख्या का वर्ग नहीं है।

वास्तव में, कोई ऋणात्मक परिमेय संख्या किसी परिमेय संख्या का वर्ग नहीं होती।

(v) $a=1,\ b=0,\ c=4.$

$$b^2-4\,ac=0^2-4\ (1)\ (4)=-16.$$

इसलिए ऋणात्मक होने के कारण b^2-4ac किसी परिमेय संख्या का वर्ग नहीं है।

(vi) $a=8,\ b=10,\ c=-3.$

$$b^2-4\,ac=(10)^2-4\ (8)\ (-3)\ =196.$$

इसलिए b^2-4ac परिमेय संख्या 14 का वर्ग है।

(vii) $a=4,\ b=-12,\ c=9.$

$$b^2-4\,ac=(-12)^2-4\ (4)\ (9)=0,$$

और इस कारण $b^2-4\,ac$ परिमेय संख्या 0 का वर्ग है।

अतः हम यह देखते हैं कि द्विघात बहुपद (i), (iii), (vi) और (vii) को परिमेय गुणांकों वाले रैखिक खंडों के गुणनफलों के रूप में व्यक्त किया जा सकता है। किन्तु बहुपद (ii), (iv) और (v) इस रूप में व्यक्त नहीं हो सकते। नीचे हम बहुपद (i), (iii), (vi), (vii) के रैखिक खण्ड प्राप्त करेंगे।

(i)

$$\begin{aligned}6x^2-7x-3\ &=6\ \left[x^2-\frac{7}{6}x-\frac{3}{6}\right]\\ &=6\ \left[\left\{x^2-\frac{7}{6}x+\left(\frac{7}{12}\right)^2\right\}-\left\{\frac{3}{6}+\left(\frac{7}{12}\right)^2\right\}\right]\\ &=6\ \left[\left(x-\frac{7}{12}\right)^2-\left(\frac{3}{6}+\frac{49}{144}\right)\right]\end{aligned}$$

$$=6\left[\left(x-\frac{7}{12}\right)^2-\frac{121}{144}\right]$$

$$=6\left[\left(x-\frac{7}{12}\right)^2-\left(\frac{11}{12}\right)^2\right]$$

$$=6\left[\left(x-\frac{7}{12}\right)+\frac{11}{12}\right]\left[\left(x-\frac{7}{12}\right)-\frac{11}{12}\right]$$

$$=6\left(x+\frac{4}{12}\right)\left(x-\frac{18}{12}\right)$$

$$=3.2\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{3}{2}\right)$$

$$=3\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{3}{2}\right)$$

$$=(3x+1)\ (2x-3).$$

III.

$$12x^2-x-6=12\left[x^2-\frac{1}{12}x-\frac{6}{12}\right]$$

$$=12\left[\left\{x^2-\frac{1}{12}x+\left(\frac{1}{24}\right)^2\right\}-\left\{\frac{6}{12}+\left(\frac{1}{24}\right)^2\right\}\right]$$

$$=12\left[\left(x-\frac{1}{24}\right)^2-\frac{289}{576}\right]$$

$$=12\left[\left(x-\frac{1}{24}\right)^2-\left(\frac{17}{24}\right)^2\right]$$

$$=12\left[\left(x-\frac{1}{24}+\frac{17}{24}\right)\left(x-\frac{1}{24}-\frac{17}{24}\right)\right]$$

$$=12\left(x+\frac{16}{24}\right)\left(x=\frac{18}{24}\right)$$

$$=4\ 3\left(x+\frac{2}{3}\right)\left(x-\frac{3}{4}\right)$$

$$=3\left(x+\frac{2}{3}\right)4\left(x-\frac{3}{4}\right)$$

$$=(3x+2)\ (4x-3).$$

ठीक इसी प्रकार हम यह भी सिद्ध कर सकते हैं कि

$$(vi)\quad 8x^2+10x-3=(4x-1)\ (2x+3)$$

और

$$(vii)\quad 4x^2-12x+9=(2x-3)^2.$$

प्रश्नावली

निम्नलिखित में से कौन-कौन-से द्विघात बहुपदों को परिमेय गुणांकों वाले रैखिक खंडों के गुणनफलों के रूप के व्यक्त किया जा सकता है। जिन्हें ऐसे व्यक्त किया जा सकता हो, उन्हें रैखिक खंडों के गुणनफलों के रूप में व्यक्त कीजिए।

(i) x^2+5x+6 (ii) x^2-9x+8
(iii) x^2+4x+7 (iv) x^2+2x-8
(v) x^2+3x-5 (vi) $x^2-3x-10$
(vii) $2x^2-7x+5$ (viii) $3x^2+8x+4$
(ix) $4x^2-9x+6$ (x) $10x^2-23x-5$
(xi) $6x^2+8x-5$ (xii) $8x^2+13x-6$
(xiii) $9x^2+24x+16$ (xiv) $4x^2-9x+4$
(xv) $7x^2+16x+4$

टिप्पणी पाठक यह ध्यान दें कि किसी द्विघात बहुपद को रैखिक खंडों के गुणनफल के रूप में व्यक्त करने की उक्त विधि से अपेक्षाकृत बड़े निरपेक्ष मानों वाले गुणांकों के प्रकरणों में परिकलन पर्याप्त जटिल हो जाते हैं। नीचे हम यह वर्णन करेंगे कि रैखिक खंडों को निरीक्षण द्वारा सरलता पूर्वक कैसे प्राप्त किया जा सकता है। निस्संदेह ऐसे खंडों के अस्तित्व का प्रतिबंध सदैव होगा।

निरीक्षण द्वारा गुणन-खंडन

मान लीजिए कि

$$ax^2+bx+c, \quad a, b, c \in Q, a \neq 0$$

ऐसा बहुपद है जिसे परिमेय गुणांकों वाले दो रैखिक खंडों के गुणनफल के रूप में व्यक्त किया जा सकता है। इस बहुपद का पुनर्लेखन सदैव

$$\frac{1}{k}\left[kax^2+kbx+kc \right]$$

के रूप में किया जा सकता है जिसमें k कोई ऐसी उपयुक्त अ-शून्य परिमेय संख्या है जिसके लिए

$$ka, kb, kc$$

सभी समुच्चय **I** के अंग हैं। तब

$$ax^2+bx+c, a, b, c \in Q, a \neq 0$$

को रैखिक खंडों के गुणनफल के रूप में लिखने की समस्या

$$(ka)x^2+(kb)x+kc, ka, kb, kc \in \mathbf{I}, a \neq 0$$

को रैखिक खंडों के गुणनफल के रूप में व्यक्त करने की समस्या में परिणत हो जाती है। इसलिए हम

$$ax^2+bx+c, a, b, c \in \mathbf{I}, a \neq 0$$

को रैखिक खंडों के गुणनफल के रूप में व्यक्त करने की की समस्या का विश्लेषण करते हैं।

मान लीजिए कि

$$ax^2+bx+c=(lx+m)\ (px+q).$$

यहाँ l, m, p, q सभी **I** के अंग हैं।

साथ ही

$$(lx+m)\ (px+q)=lpx^2+(lq+mp)\ x+mq$$

और इसलिए

$$a=lp,\ b=lq+mp,\ c=mq.$$

परिणामत:

$$ac=(lp)\ (mq)=(lq)\ (mp)$$

अब

$$a\in \mathbf{I},\ c\in \mathbf{I}\Rightarrow ac\in \mathbf{I}.$$

साथ ही lq और mp दोनों ac के ऐसे खंड हैं जिनका योगफल b है। अत: द्विघात बहुहद के खंड पाने की निम्नलिखित विधि प्राप्त हो जाती है।

विधि—x^2 के गुणांक a और अचर पद c के गुणनफल ac को दो पूर्ण संख्याओं के गुणनफल के रूप में इस प्रकार व्यक्त कीजिए कि इन दो संख्याओं का योगफल x का गुणांक b हो। b को इन दो संख्याओं के योगफल के रूप में लिखकर वितरण नियम का प्रयोग करते हुए आगे चलिए।

निम्नलिखित उदाहरणों द्वारा इस विधि का निर्देशन किया जा रहा है।

उदाहरण—

निम्नलिखित के खंड कीजिए।

(*i*) $4x^2+12x+5$ (*ii*) $4x^2-23x-6$

(*iii*) $6x^2-13x+5$ (*vi*) $5x^2+13x-6$

(*i*) x^2 के गुणांक और अचर पद का गुणनफल 4×5 अर्थात् 20 है।

पुन: 20 के कई खंड-युग्मों में से हम 10, 2 को चुनते हैं क्योंकि

$$10+2$$

x का गुणांक 12 है।

अब

$$\begin{aligned}4x^2+12x+5&=4x^2+(10+2)x+5\\&=(4x^2+10x)+(2x+5)\\&=2x(2x+5)+(2x+5)\\&=2x(2x+5)+1\cdot(2x+5)\\&=(2x+1)(2x+6).\end{aligned}$$

(*ii*) x^2 के गुणांक और अचर पद का गुणनफल 4 (—6) अर्थात् —24 है।
—24 के खंड-युग्मों में से हम युग्म —24, 1 को लेते हैं क्योंकि

$$-24+1$$

x का गुणांक —23 है।

अब

$$\begin{aligned}4x^2-23x-6 &= 4x^2+(-24+1)\,x-6\\ &= (4x^2-24x)+(x-6)\\ &= 4x\,(x-6)+1.\,(x-6)\\ &= (4x+1)\,(x-6).\end{aligned}$$

(*iii*) x^2 के गुणांक और अचरपद का गुणनफल 6×5 अर्थात् 30 है। हम 30 के खंड-युग्म —10 और—3 को लेते है क्योंकि उनका योगफल

$$-10+(-3)$$

x का गुणांक—13 है।

अब

$$\begin{aligned}6x^2-13x+5 &= 6x^2-(10+3)\,x+5\\ &= 6x^2-10x)-(3x-5)\\ &= 2x(3x-0)+(-1)\,(3x-5)\\ &= (2x-1)\,(3x-5).\end{aligned}$$

(*iv*) x^2 के गुणांक और अचर पद का गुणनफल 5(—6)
अर्थात्—30 है।

हम—30 के खंड-युग्म 15,—2 को लेते हैं क्योंकि उनका योगफल

$$15-2$$

x का गुणांक—13 है।

अब

$$\begin{aligned}5x^2+13x-6 &= 5x^2+(15-2)x-6\\ &= (5x^2+15x)-(2x+6)\\ &= 5x(x+3)-2(x+3)\\ &= (5x-2)\,(x+3).\end{aligned}$$

प्रश्नावली

निम्नलिखित के खंड कीजिए।

(i) x^2+6x+5

(ii) x^2-3x+2

(iii) x^2+4x-5

(iv) $x^2-12x-28$

(v) $2x^2+7x+5$

(vi) $6x^2-13x+6$

(vii) $3y^2-5y+2$

(viii) $12y^2-11y-15$

(ix) $2y^2-5y-25$

(x) $12t^2-32t+21$

(xi) $3t^2+7t+2$

(xii) $3t^2-7t-6$

(xiii) $14u^2-15u-11$

(xiv) $21-4u-u^2$

(xv) $9u^2-30u+25$.

53 Q में द्विघात समीकरण $ax^2+bx+c=O$.

इस भाग में हम द्विघात समीकरण

$$ax^2+bx+c=0,\ a,\ b,\ c, \in \mathbf{Q},\ a \neq 0.$$

को हल करने की विभिन्न विधियों का अध्ययन करेंगे।

सर्व-प्रथम हम किसी रैखिक बहुपद के किसी द्विघात बहुपद का खंड होने की कसौटी प्राप्त करेंगे। यह कसौटी हमें समीकरण के मूलों और इसके अनुरूप बहुपद के खंडों का संबंध निम्नलिखित प्रमेय के रूप में बतलाती है।

प्रमेय—कोई परिमेय संख्या h तब और तभी द्विघात समीकरण

$$ax^2+bx+c=O,\ a,b,c, \in \mathbf{Q},\ a \neq 0$$

का मूल होती है जब $x-h$ खंड हो ax^2+bx+c का।

उपपत्ति—

मान लीजिए कि कोई परिमेय संख्या h

$$ax^2+bx+c=0$$

का मूल है। तब

$$ah^2+bh+c=O.$$

$\forall x \in \mathbf{Q}$,

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c &= (ax^2+bx+c)-0 \\ &= (ax^2+bx+c)-(ah^2+bh+c) \\ &= a(x^2-h^2)+b(x-h) \\ &= a(x+h)\ (x-h)+b(x-h) \\ &= (x-h)\ [a(x+h)+b] \\ &= (x-h)\ [ax+(ah+b)] \end{aligned}$$

इस प्रकार $x-h$ खंड है ax^2+bx+c का।

विलोमतः, मान लीजिए कि $x-h$ खंड है

$$ax^2+bx+c$$

का। इसलिए परिमेय गुणांकों वाला एक ऐसा रैखिक बहुपद $lx+m$ होगा जिसके लिए

$$ax^2+bx+c=(x-h)(lx+m), \quad \forall x \in Q.$$

x को h द्वारा प्रतिस्थापित करने पर

$$ah^2+bh+c=(h-h)(lh+m)=0\ (lh+m)=0$$

अतः h द्विघात समीकरण

$$ax^2+bx+c=0$$

का एक मूल है।

द्विघात समीकरण $ax^2+bx+c=0$ का सत्य समुच्चय

हम पहले देख चुके हैं कि

$$ax^2+bx+c$$

तब और तभी परिमेय गुणांकों वाले दो रैखिक खंडों का गुणनफल होता है जब

$$b^2-4ac$$

किसी परिमेय संख्या का वर्ग हो।

मान लीजिए कि b^2-4ac किसी परिमेय संख्या का वर्ग है।

तब निम्नलिखित प्रकार का एक संबंध होगा :

$$ax^2+bx+c=(lx+m)(px+q). \quad \ldots(1)$$

अब $$lx+m=0 \Leftrightarrow =-m/l$$

और $$px+q=0 \Leftrightarrow x=-q/p.$$

(1) में x को $-m/l$ और $-q/p$ द्वारा पृथक्तः प्रतिस्थापित करने पर हम देखते हैं कि $-m/l$ और $-q/p$ समीकरण

$$ax^2+bx+c=0$$

के मूल हैं।

साथ ही $-m/l$, $-q/p$ के अतिरिक्त x का कोई और मान इस समीकरण का मूल नहीं हो सकता। वास्तव में, यदि हम x को $-m/l$, $-q/p$ के अतिरिक्त किसी संख्या से प्रतिस्थापित करें तो (1) के दाएँ पक्ष के दोनों खंडों में से कोई भी शून्य नहीं होगा और इसका गुणनफल भी शून्य नहीं होगा।

अतः केवल $-m/l$ और $-q/p$ ही इस समीकरण के दो मूल हैं, और इसलिए सत्य समुच्चय

$$\{-m/l, -q/p\}$$ है।

किन्तु यदि $$b^2-4ac=0$$

तो $$-m/l=-q/p.$$

वास्तव में, हम पहले ही देख चुके हैं कि

$$b^2-4ac=(lq-mp)^2,$$

इसलिए

$$b^2-4ac=0 \Rightarrow (lq-mr)^2=0$$
$$\Rightarrow lq-mp=0$$
$$\Rightarrow -m/l=-q/p.$$

इस अवस्था में समीकरण का सत्य समुच्चय

$$\{-m/l\}$$

होगा।

अतः हम यह सिद्ध कर पाए कि

समीकरण

$$ax^2+bx+c=0.\ a,b,c, \in \mathrm{R},\ a \neq 0,$$

का सत्य समुच्चय

(*i*) दो अंगों वाला होता है अर्थात् समीकरण के दो मूल होते हैं यदि $b^2-4\,ac$ किसी अ-शून्य परिमेय संख्या का वर्ग हो।

(*ii*) एक ही अंग वाला होता है यदि $b^2-4ac=0$.

(*iii*) रिक्त होता है यदि $b^2-4\,ac$ किसी परिमेय संख्या का वर्ग न हो।

तदनुरूप, हम यह भी कहते हैं कि समीकरण

(*i*) के दो विभिन्न मूल हैं।

(*ii*) के दो बराबर मूल हैं।

(*iii*) का कोई मूल नहीं है।

टिप्पणी निस्संदेह, द्विघात समीकरण को हल करने की उक्त विधि व्यवहार में बहुत सहायक है तदापि यह समीकरण के मूलों को गुणांक $a,b,c,$ के रूप में नहीं देती। निम्नलिखित प्रक्रिया में हम इस कठिनाई को भी पार कर सकेंगे।

वैकल्पिक हल

द्विघात समीकरण को हल करने की प्रक्रिया निम्नलिखित रूप में भी प्रदर्शित की जा सकती है। निस्संदेह, हम यह मान कर चलते हैं कि b^2-4ac किसी परिमेय संख्या का वर्ग है और इस कारण परिमेय संख्याओं के समुच्चय के प्रसंग में $\sqrt{b^2-4ac}$ सार्थक है। हम तुल्य कथनों की निम्नलिखित शृंखला प्राप्त करते हैं।

$$ax^2+bx+c=0.$$

(अ-शून्य a से भाग देने पर)

$$\Leftrightarrow \quad x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$

(दोनों पक्षों में $-\frac{c}{a}$ जोड़ने पर)

$$\Leftrightarrow \quad x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}.$$

(दोनों पक्षों में x के गुणांक के आधे का वर्ग जोड़ने पर)

$$\Leftrightarrow \quad x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad x+\frac{b}{2a}=+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\Leftrightarrow \quad x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

इससे सिद्ध हुआ कि अपेक्षित सत्य समुच्चय

$$\left\{\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\quad \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right\}$$

है।

किन्तु यदि $b^2-4ac=0$ तो सत्य समुच्चय के दोनों अंग एक ही हो जाते हैं। और तब सत्य समुच्चय में केवल एक ही अंग होगा और यह सत्य समुच्चय

$$\left\{-\frac{b}{2a}\right\}$$

होगा।

किसी द्विघात समीकरण को हल करने की विभिन्न विधियाँ

समीकरण

$$ax^2+bx+c=0,\ a,\ b,\ c\in\mathbf{Q},\ a\neq 0$$

लीजिए।

सर्व-प्रथम हम यह देखते हैं कि क्या निरीक्षण द्वारा बहुपद

$$ax^2+bx+c$$

के खंड हो सकते हैं। यदि निरीक्षण द्वारा यह पता चले कि

$$ax^2+bx+c=(lx+m)\ (px+q)$$

तो अपेक्षित सत्य समुच्चय

$$\left\{-\frac{m}{l},\quad -\frac{q}{p}\right\}$$

होगा। निस्संदेह कुछ प्रकरणों में ये दोनों संख्याएँ एक ही हो सकती हैं और तब सत्य समुच्चय एक ही अंग वाला होगा।

यदि हम निरीक्षण द्वारा खंडों का निर्धारण न कर सकें तो वर्ग-पूर्ति द्वारा खंड प्राप्त कर सकते हैं। इसे पृष्ठ 288 पर प्रदर्शित किया गया है।

हम खंडों को जाने बिना भी सत्य समुच्चय प्राप्त कर सकते हैं जैसा कि पृष्ठ 284 पर किया गया है।

अन्ततः हम

$$\left\{\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\ \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right\}$$

में a, b, c को प्रतिस्थापित करके ही मूल लिख सकते हैं। निस्संदेह सभी प्रकरणों में b^2-4ac अनिवार्यतः किसी परिमेय संख्या का वर्ग होना चाहिए। निम्नलिखित उदाहरणों में विभिन्न विधियों का निर्देश किया जाएगा।

उदाहरण—

I. निम्नलिखित द्विघात समीकरणों को हल कीजिए।

(i) $x^2-7x+12=0$ (ii) $6x^2+x-15=0$

(iii) $39x^2-7x-22=0$ (vi) $4x^2+12x+9=0$

(i) x^2 के गुणांक और अचर पद का गुणनफल 1×12 अर्थात् 12 है। 12 के -3, -4 दो ऐसे खंड हैं कि उनका योगफल

$$-3-4$$

x का गुणांक -7 है।

इस प्रकार

$$\begin{aligned}x^2-x7+12&=x^2-3x-4x+12\\&=x(x-3)-4(x-3)\\&=(x-3)(x-4)\end{aligned}$$

अतः दत्त समीकरण का सत्य समुच्चय

$$\{3, 4\}$$

है अथवा 3, 4 समीकरण के मूल हैं।

II.
$$\begin{aligned}6x^2+x-15&=6\left(x^2+\frac{1}{6}x-\frac{15}{6}\right)\\&=6\left[\left\{x^2+\frac{1}{6}x\left(\frac{1}{12}\right)^2\right\}-\left\{\frac{15}{16}+\left(\frac{1}{12}\right)^2\right\}\right]\\&=6\left[\left(x+\frac{1}{12}\right)^2-\left(\frac{361}{144}\right)^2\right]\\&=6\left[\left(x+\frac{1}{12}\right)^2\left(\frac{19}{12}\right)^2\right]\\&=6\left(x+\frac{1}{12}+\frac{19}{12}\right)\left(x+\frac{1}{12}-\frac{19}{12}\right)\end{aligned}$$

$$=6\left(x+\frac{20}{12}\right)\left(x-\frac{18}{12}\right)$$
$$=3\left(x+\frac{5}{3}\right)\left(x-\frac{3}{2}\right)$$
$$=3\left(x+\frac{5}{3}\right)2\left(x-\frac{3}{2}\right)$$
$$=(3x+5)(2x-3)$$

इस प्रकार

$$6x^2+x-15=(3x+5)\;(2x-3)\;\forall\; x\in \mathbf{Q}$$

अब

$$=2x-3=0 \quad\Leftrightarrow\quad x-\frac{3}{2}$$

और

$$=3x+5=0 \quad\Leftrightarrow\quad x-\frac{5}{3}$$

अतः अपेक्षित सत्य समुच्चय

$$\left\{\frac{3}{2},\quad -\frac{5}{3}\right\}$$

है।

III. इसमें

$$a=39,\; b=-7,\; c=-22,$$

और इसलिए

$$b^2-4ac=(-7)^2-4\;(39)\;(-22)$$
$$=49+4\times 39\times 22$$
$$=49+3432$$
$$=3481=(59)^2.$$

हमें ज्ञात है कि समीकरण

$$ax^2+bx+c=0$$

के मूल

$$\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\qquad \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

हैं।

a, b, c के मानों को रखने से दत्त समीकरण के मूल

$$\frac{7+59}{2\times 39},\;\frac{7-59}{2\times 39}$$

अर्थात्

$$\frac{11}{13}, \quad -\frac{2}{3}$$

प्राप्त होते हैं।

IV. हम तुल्य कथनों की निम्नलिखित शृंखला प्राप्त करते हैं।

$$4x^2+12x+9=0$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2+3x+\frac{9}{4}=0$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2+3x=\frac{-9}{4}$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2+3x+\left(\frac{3}{2}\right)^2=-\frac{9}{4}+\left(\frac{3}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(x+\frac{3}{2}\right)^2=0.$$

अतः दत्त समीकरण का केवल एक ही मूल, $-\frac{3}{2}$, है।

2. $$\frac{x-1}{x-2}+\frac{x-3}{x-4}=3\frac{1}{3}$$

को हल कीजिए।

हल

2 और 4 के अतिरिक्त x कोई भी परिमेय संख्या हो तो समता के दोनों पक्षों में आने वाले बीजीय व्यंजक सार्थक हैं। अतः x का प्रभाव-क्षेत्र संख्याओं 2 और 4 से रहित सभी परिमेय संख्याओं का समुच्चय है।

उक्त प्रभाव-क्षेत्र में x के किसी भी मान के लिए

$$3\,(x-2)\,(x-4)$$

अ-शून्य है। दत्त समीकरण के दोनों पक्षों को इससे गुणा करने पर तुल्य समीकरणों की निम्नलिखित शृंखला प्राप्त होती है।

$$3\,(x-1)\,(x-4)+3\,(x-3)\,(x-2)=10\,(x-2)\,(x-4)$$

$$\Leftrightarrow \quad 3\,(x^2-5x+4)+3\,(x^2-5x+6)=10\,(x^2-6x+8)$$

$$\Leftrightarrow \quad 6x^2-30x+30=10x^2-60x+80$$

$$\Leftrightarrow \quad -4x^2-30x+50=0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2x^2-15x+25=0$$

$$\Leftrightarrow \quad (2x-5)\,(x-5)=0$$

अतः अपेक्षित सत्य समुच्चय

$$\left\{\frac{5}{2}, 5\right\}$$

है ।

प्रश्नावली

1. निम्नलिखित के सत्य समुच्चय निकालिए ।

(i) $x^2-9=0$ (ii) $x^2-4x+4=0$

(iii) $4x^2+28x+49=0$ (iv) $x^2+5x-84=0$

(v) $x^2+10x+16=0$ (vi) $8x^2-18x+21=0$

(vii) $2y^2+8y+3=0$ (viii) $-y^2+8y-15=0$

(ix) $3y^2-y-2=0$ (x) $3y^2+11y-20=0$

(xi) $6y^2+15y-77=0$ (xii) $4y^2-13y+15=0$

2. निम्नलिखित को हल कीजिए ।

(i) $\dfrac{3x+2}{x-1}+\dfrac{2x+5}{x+2}=0$ (ii) $\dfrac{3}{x-6}+\dfrac{7}{x-2}=\dfrac{10}{x-4}$

(iii) $\dfrac{(x+1)\ (x+2)}{(x+4)\ (x+4)}=\dfrac{x+3}{x+7}$ (iv) $\dfrac{x}{x-2}-\dfrac{x+1}{x-1}=\dfrac{x-3}{x-6}-\dfrac{x-4}{x-7}$

54. द्विघात असमताएँ

द्विघात असमताओं के सत्य समुच्चय निकालने की विधि को स्पष्ट करने के लिए हम निम्नलिखित उदाहरण लेते हैं ।

उदाहरण

निम्नलिखित द्विघात असमताओं के सत्य समुच्चय निकालिए ।

(i) $x^2-3x+2>0$ (ii) $x^2-3x+2\geqslant 0$

(iii) $x^2-3x+2<0$ (iv) $x^2-3x+2\leqslant 0$

हल

(i) हमें ज्ञात है कि दो संख्याओं का गुणनफल तब और तभी धनात्मक होता है जब या तो दोनों संख्याएँ धनात्मक हों या ऋणात्मक । साथ ही

$$x^2-3x+2=(x-1)\ (x-2)$$

इस कारण

$$\{\ x : x^2-3x+2>0\ \}=\{\ x : (x-1)\ (x-2)\ >0\ \}$$

पुनः

$$\{\ x : (x-1)\ (x-2) > 0\ \}=\{\ x : x-1>0 \text{ और } x-2>0\}$$
$$\cup\ \{\ x : x-1<0 \text{ और } x-2<0\}$$

अब

$$x-1>0 \Leftrightarrow x>1$$

और

$$x-2>0 \Leftrightarrow x>2$$

और इसलिए

$$x-1>0 \text{ और } x-2>0 \Leftrightarrow x>2$$

पुनः

$$x-1<0 \Leftrightarrow x<1$$

और

$$x-2<0 \Leftrightarrow x<2$$

इसलिए

$$x-1<0 \text{ और } x-2<0 \Leftrightarrow x<1.$$

अतः अपेक्षित सत्य समुच्चय

$$\{ x : x>2 \} \cup \{ x : x<1 \}$$

है। इस प्रकार 1 से कम प्रत्येक परिमेय संख्या सत्य समुच्चय का अंग है और 2 से अधिक प्रत्येक परिमेय संख्या भी सत्य समुच्चय का अंग है। हम यह भी कह सकते हैं कि 1 और 2 तथा उनके बीच की संख्याओं को छोड़कर सभी परिमेय संख्याएँ सत्य समुच्चय में है।

(*ii*) हम देखते हैं कि—

$$\{x : x^2-3x+2\geqslant 0\}=\{x : x^2-3x+2>0\} \cup \{x : x^2-3x+2=0\}$$
$$=\{x : (x-1)\ (x-2)>0\}\cup\{1, 2\}$$
$$=\{x : x>2\} \cup \{x : x<1\} \cup \{1,\ 2\}$$

1 और 2 के बीच की संख्याओं को छोड़कर सभी परिमेय संख्याएँ सत्य समुच्चय में हैं। तुल्य रूप में हम यह भी कह सकते हैं कि सत्य समुच्चय में 1 से कम अथवा 1 के बराबर सभी परिमेय संख्यायें हैं और 2 से अधिक अथवा 2 के बराबर सभी परिमेय संख्याएँ भी हैं।

(*iii*) हमें ज्ञात है कि दो संख्याओं का गुणनफल तब और तभी ऋणात्मक होता है जब उनमें से एक धनात्मक और दूसरी ऋणात्मक हो। इस प्रकार

$$\{x : x^2-3x+2<0\}=\{x : (x-1)\ (x-2)<0\}$$
$$=\{x : (x-1)>0 \text{ और } (x-2)<0\}$$
$$\cup\{x : (x-1)<0 \text{ और } (x-2)>0\}$$

अब

$$x-1>0\Leftrightarrow x>1$$

और

$$x-z<0\Leftrightarrow x>2$$

इसलिए

$x-1>0$ और $x-2<0\Leftrightarrow x$ बीच में है 1 और 2 के।

पुनः

$$x-1 < 0 \Leftrightarrow x < 1$$

और

$$x-2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$$

किन्तु

$x < 1$ और $x > 2$ मिथ्या है।

इस कारण

$$\{x : x-1<0 \text{ और } x-2>0\}=\phi$$

और फलतः

$$\{x : x^2-3x+2<0\}=\{x : 1<x<2\}$$

अपेक्षित सत्य समुच्चय 1 और 2 के बीच की सभी परिमेय संख्याओं का समुच्चय है।

$$(iv)\quad \{x : x^2-3x+2\leqslant 0\}=\{x : (x-1)\ (x-2)\leqslant 0\}$$
$$=\{x : (x-1)\ (x-2)<0\} \cup \{x : (x-1)\ (x-2)=0\}$$
$$=\{x : 1< x <2\} \cup \{1, 2\}$$
$$=\{x : 1\leqslant x \leqslant 2\}$$

अतः सत्य समुच्चय में परिमेय संख्याएँ 1 और 2 तथा उनके बीच की सभी परिमेय संख्याएँ हैं।

प्रश्नावली

निम्नलिखित असमताओं के सत्य समुच्चय निकालिए।

(i) $(1-x)\ (x-2)>0$

(ii) $(x+1)\ (x-3)\leqslant 0$

(iii) $(x+2)\ (3-x)>0$

(iv) $(x+4)\ (x+5)\geqslant 0$

(v) $(2x-1)\ (x-2)>0$

(vi) $(3x+2)\ (4x+5)<0$

(vii) $x^2-9x+20\geqslant 0$

(viii) $x^2+x-20<0$

(ix) $6x^2-x-2<0$

(x) $-5x^2-2x+3>0$

(xi) $x^2-2x-8<0$

(xii) $x^2-2x>15.$

55. निर्मेय

1. दो क्रमागत विषम संख्याओं के वर्गों का योगफल 130 है। संख्याएँ निकालिए।

मान लीजिए कि एक संख्या $2x-1$ है तब दूसरी $2x+1$ होगी। और तब

$$(2x-1)^2+(2x+1)^2=130$$
$$\Leftrightarrow (4x^2-4x+1)+(4x^2+4x+1)=130$$
$$\Leftrightarrow \quad 8x^2-128=0$$
$$\Leftrightarrow \quad x^2-16=0$$
$$\Leftrightarrow \quad (x+4)\ (x-4)=0$$

इस प्रकार समीकरण का सत्य समुच्चय

$$\{4, -4\}$$

है ।

यदि x को 4 लें तो संख्याएँ $2\times4-1$, $2\times4+1$ अर्थात् 7, 9 होंगी । पुनः यदि x को -4 लें तो संख्याएँ $2\times(-4)-1$, $2\times(-4)+1$ अर्थात् $-9, -7$ होंगी ।

अपेक्षित संख्याएँ 7, 9 अथवा $-7, -9$ हैं ।

2. किसी आयत की लंबाई उसकी चौड़ाई से 2 मीटर अधिक है । यदि लंबाई 6 मीटर बढ़ा दें और चौड़ाई 2 मीटर घटा दें तो क्षेत्रफल 119 वर्गमीटर हो जाता है । पहली आयत की लंबाई-चौड़ाई निकालिए ।

हल

मान लीजिए कि आयत की चौड़ाई x मीटर है ।

इसकी लंबाई $x+2$ मीटर होगी ।

नई लंबाई और चौड़ाई क्रमशः

$(x+2)+6$ मीटर और $(x-2)$ मीटर

होगी ।

क्योंकि नई आयत का क्षेत्रफल 119 वर्गमीटर है इसलिए

$$(x+8)(x-2)=119$$
$$\Leftrightarrow x^2+6x-16-119=0$$
$$\Leftrightarrow x^2+6x-135=0$$
$$\Leftrightarrow x^2+15x-9x-135=0$$
$$\Leftrightarrow x(x+15)-9(x+15)=0$$
$$\Leftrightarrow (x-9)(x+15)=0$$

इसलिए सत्य समुच्चय $\{9, -15\}$ है ।

यद्यपि -15 समीकरण का समाधान करता है तो भी हमें इसे छोड़ना होगा, क्योंकि आयत की चौड़ाई ऋणात्मक नहीं हो सकती ।

अतः आयत की चौड़ाई 9 मीटर और लंबाई 11 मीटर है ।

प्रश्नावली

1. ऐसी संख्या निकालिए जिसका वर्ग संख्या के 6 गुणे से 5 कम है ।

2. दो संख्याओं का योगफल 16 तथा उनके वर्गों का योगफल 146 है । संख्याएँ निकालिए ।

3. किसी संख्या के आधे में 3 जोड़ने से संख्या का वर्ग प्राप्त होता है । संख्या बताइए ।

4. एक त्रिभुज का क्षेत्रफल 12 व० सें० मी० है। इसके आधार और ऊँचाई दो क्रमागत संख्याएँ हैं। त्रिभुज का आधार और उसकी ऊँचाई निकालिए।

5. एक आयत का परिमाप 44 से० मी० और क्षेत्रफल 105 व० सें० मी० है। इसकी भुजाएँ निकालिए।

6. एक आयताकार क्षेत्र की लंबाई उसकी चौड़ाई से $4\frac{1}{2}$ मीटर अधिक है। यदि इसका क्षेत्रफल 90 वर्ग मीटर हो तो क्षेत्र की लंबाई निकालिए।

संक्षेप

बहुपद

$$ax^2+bx+c \qquad a, b, c \in \mathbf{Q}, a \neq 0$$

को दो रैखिक खंडों के गुणनफल के रूप में तब और तभी व्यक्त किया जा सकता है जब b^2-4ac किसी परिमेय संख्या का वर्ग हो।

समीकरण

$$ax^2+bx+c=0, \quad a,b,c \in \mathbf{Q}, a \neq 0$$

(I) के दो मूल $\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, $\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

होते हैं यदि b^2-4ac किसी अ-शून्य परिमेय संख्या का वर्ग हो।

(II) का एक मूल $-\dfrac{b}{2a}$ होता है।

यदि $b^2-4ac=0$.

(III) का कोई मूल नहीं होता

यदि b^2-4ac किसी परिमेय संख्या का वर्ग न हो।

सिंहावलोकन प्रश्नावली

1. निम्नलिखित बहुपदों में से कौन-कौन-से रैखिक खंडों के गुणनफलों के रूप म व्यक्त किए जा सकते हैं। जो इस प्रकार व्यक्त किए जा सकते हैं उन्हें रैखिक खंडों के गुणनफलों के रूप में लिखिए।

(*i*) x^2-5x+8 (*ii*) $x^2+9x+18$

(*iii*) $x^2+13x+24$ (*iv*) $10x^2+19x-15$

(*v*) $8x^2-29x-20$ (*vi*) $7x^2+18x+8$.

2. निम्नलिखित समीकरणों के सत्य समुच्चय निकालिए।

(*i*) $x^2+12x+20=0$ (*ii*) $3x^2+x-10=0$

(*iii*) $x^2+6x-27=0$ (*iv*) $12x^2-20x-25=0$

(v) $7x^2-x=0$ (vi) $2x^2-3x+4=0$

(vii) $4x^2-4x+1=0$ (viii) $3x^2+5=0$

(ix) $4x^2-25=0.$

3. निम्नलिखित को हल कीजिए।

(i) $x+5+\dfrac{6}{x-2}=0$ (ii) $3-x+\dfrac{14}{x}=0$

(iii) $\dfrac{x+2}{x}+\dfrac{3x}{x+4}=0$ (iv) $\dfrac{6}{x^2+9}=\dfrac{1}{x}.$

4. खंड कीजिए

(i) $x^2+x-(a^2-3a+2)$ (ii) $4x^2+12\,ax+9a^2-8x-12\,a$

(iii) $4x^2+4\,(3a-2)\,x+9\,a^2-12\,a$ (iv) $2x^2+7\,(1-a)\,x-(4a^2-8x+4)$

5. किसी आयत की लंबाई एक वर्ग की भुजा से दुगुनी है। वर्ग की भुजा आयत की चौड़ाई से 4 सें० मी० अधिक है। यदि उनके क्षेत्रफल बराबर हों तो उनकी भुजाएँ निकालिए।

6. एक त्रिभुज के आधार और ऊँचाई का योगफल 22 सें० मी० है। यदि उसका क्षेत्रफल 52·5 व० सें० मी० हो तो आधार और ऊँचाई निकालिए।

7. ऐसी तीन क्रमागत धनात्मक पूर्ण संख्याएँ बताइए जिनके वर्गों का योगफल 1202 हो।

8. 27 को दो ऐसे धनात्मक भागों में विभक्त कीजिए कि भागों के वर्गों का योगफल 425 हो।

9. एक कार 648 कि० मी० दूरी पार करती है। कार जितने कि० मी० प्रतिघंटा की गति से चलती है उतने के आधे घंटों में यात्रा पूरी हो जाती है। यात्रा का समय निकालिए।

10. 600 कि० मी० की उड़ान में मौसम की खराबी के कारण एक विमान की गति धीमी हो गई। यात्रा की औसत गति 200 कि० मी० प्रतिघंटा कम हो गई और कुल समय आधा घंटा बढ़ गया। उड़ान में वास्तविक समय कितना लगा था।

परिशिष्ट

संख्यान-पद्धतियाँ

अध्याय 1 में यह निर्देश किया गया था कि संख्यान की विभिन्न स्थानमान पद्धतियाँ हैं क्योंकि एक से अधिक किसी धन-संख्या के अनुरूप स्थानमान पद्धति होती है। अब तक हमने अपने आपको उस दशमलव पद्धति तक ही सीमित रखा है जिसमें दस प्रतीकों

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,$$

का प्रयोग होता है, किन्तु अब हम प्रतीकों की सीमित संख्या वाली संख्यान-पद्धतियों का विचार करेंगे। इस सीमित संख्या को पद्धति का आधार कहते हैं।

पहले हम पाँच प्रतीकों

$$0, 1, 2, 3, 4$$

वाली पद्धति का विचार करते हैं। हम एक ऐसी धन-संख्या लेते हैं जो दशमलव पद्धति में

$$274$$

के रूप में व्यक्त है। हम 274 को 5 से भाग देने पर प्राप्त भागफल को भी 5 से भाग देते हैं। उत्तरोत्तर भागफलों को 5 से भाग देते रहने की इस प्रक्रिया द्वारा हम

$$274=54\times5+4$$
$$54=10\times5+4$$
$$10=2\times5+0$$
$$2=0\times5+2$$

प्राप्त करते हैं। इस प्रकार

$$\begin{aligned}274&=(10\times5+4)\times5+4\\&=10\times5^2+4\times5+4\\&=(2\times5+0)\,5^2+4\times5+4\\&=2\times5^3+0\times5^2+4\times5+4.\end{aligned}$$

दाईं ओर का व्यंजक

$$(2044)_5$$

के रूप में लिखा जाता है। यहाँ पादांक 5 प्रयुक्त आधार पाँच का सूचक है।

अतः

$$(274)_{10}=(2044)_5.$$

टिप्पणी—1. सामान्यतः दशमलव पद्धति में किसी संख्या को कोष्ठकों और पादांक 10 का प्रयोग किए बिना ही लिख दिया जाता है। इसलिए यदि आधार का विशेष उल्लेख न हो तो उसे 10 ही माना जाता है।

2. यहाँ पाठक को यह स्मरण कराया जाता है कि $(2044)_5$ लिखने की यह प्रक्रिया आधार 10 वाली दशमलव पद्धति में

$$2\times10^2+7\times10+4$$

के स्थान पर 274 लिखने की प्रक्रिया के ठीक समान है।

विलोमतः, संख्या

$$(13024)_5$$

लीजिए। सार-रूप में उक्त संख्या

$$1\times5^4+3\times5^3+0\times5^2+2\times5+4$$

को व्यक्त करती है और दशमलव पद्धति में यह संख्या

$$625+375+10+4 \text{ अर्थात् } 1014$$

है। इस प्रकार

$$(13024)_5=(1014)_{10}.$$

अतः हम आधार 10 में दी गई किसी संख्या का आधार 5 में रूपान्तर कर सकते हैं और विलोमतः भी। ठीक इसी प्रकार हम आधार 10 में दी गई किसी संख्या का किसी दूसरे आधार में रूपांतर कर सकते हैं और विलोमतः भी।

जैसे, नीचे हम

$$(5707)_{10}$$

का आधार 7 में रूपांतर करते हैं।

यहाँ

$$\begin{aligned}5707&=815\times7+2\\815&=116\times7+3\\116&=16\times7+4\\16&=2\times7+2\\2&=0\times7+2\end{aligned}$$

इनसे उत्तरोत्तर

$$\begin{aligned}5707&=(116\times7+3)\,7+2\\&=116\times7^2+3\times7+2\\&=(16\times7+4)\,7^2+3\times7+2\\&=16\times7^3+4\times7^2+3\times7+2\end{aligned}$$

$$=(2\times 7+2)\ 7^3+4\times 7^2+3\times 7+2$$
$$=2\times 7^4+2\times 7^3+4\times 7^2+3\times 7+2$$

प्राप्त करते हैं।

अतः $$(5707)_{10}=(22432)_7.$$

पुनः हम $(54235)_6$ का आधार 10 में रूपांतर करते हैं। यहाँ

$$(54235)_6=5\times 6^4+4\times 6^3+2\times 6^2+3\times 6+5$$
$$=6480+864+72+18+5$$
$$=7439.$$

इस प्रकार $$(54235)_6=(7439)_{10}.$$

ऊपर के उदाहरणों में प्रदर्शित प्रक्रिया की सहायता से किसी आधार में व्यक्त किसी संख्या को किसी और आधार में व्यक्त कर सकते हैं। हमें पहले दत्त संख्या का आधार 10 में रूपांतर करना होगा और फिर दशमलव पद्धति में प्राप्त इस संख्या को अपेक्षित आधार में व्यक्त करना होगा। दशमलव पद्धति के माध्यम से रूपांतर करने का कारण यह है कि इसके साथ हमारे परिचय से इसमें परिकलन बहुत सरलता और सुविधा से हो सकते हैं। इसे हम निम्नलिखित उदाहरण द्वारा प्रदर्शित करते हैं।

टिप्पणी—अध्याय *IV* में चर्चित दशमलव भिन्नों की भाँति हम द्वि-आधारी भिन्नों, त्रि-आधारी भिन्नों इत्यादि की बात भी कर सकते हैं। किन्तु यहाँ इसके अध्ययन का हमारा विचार नहीं है।

उदाहरण

1. $(3204)_6$ को आधार 7 में व्यक्त कीजिए।

हल $$(3204)_6=3\times 6^3+2\times 6^2+0\times 6+4$$
$$=648+72+4$$
$$=724.$$

पुनः
$$724=103\times 7+3$$
$$103=14\times 7+5$$
$$14=2\times 7+0$$
$$2=0\times 7+2.$$

अतः $$724=(2053)_7.$$

और इसलिए $$(3204)_6=(724)_{10}=(2053)_7.$$

2. $(32)_5$ को आधार 2 में व्यक्त कीजिए।

हल $$(32)_5=3\times 5+2$$

इसलिए $$(32)_5=(17)_{10}.$$

आधार 10 में परिकलन करने से

$$17 = 8 \times 2 + 1$$
$$8 = 4 \times 2 + 0$$
$$4 = 2 \times 2 + 0$$
$$2 = 1 \times 2 + 0$$
$$1 = 0 \times 2 + 1$$

प्राप्त होते हैं। इनके आधार पर

$$17 = 1 \times 2^2 + 0 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2 + 1$$

और इसलिए $(32)_5 = (17)_{10} = (10001)_2.$

यदि आधार दस से अधिक हो तो हमें दस प्रतीकों

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 8, 9,

के अतिरिक्त और भी प्रतीक लेने होंगे।

मान लीजिए कि हम किसी संख्या को आधार 12 में व्यक्त करना चाहते हैं। तब हमें 12 प्रतीकों की आवश्यकता होगी। दशमलव पद्धति के दस प्रतीकों के साथ हमें दो और प्रतीक चाहिएँ। इन्हें हम α और β द्वारा सूचित करते हैं। अतः हमारे पास बारह प्रतीक

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, α, β

हो गए। यहाँ प्रतीक α और β क्रमशः संख्याओं दस और ग्यारह को व्यक्त करते हैं।

उदाहरण

$(51778)_{10}$ को आधार बारह में प्रदर्शित कीजिए।

हल

दशमलव पद्धति में 12 से उत्तरोत्तर भाग देने पर

$$51778 = 4314 \times 12 + 10$$
$$4314 = 359 \times 12 + 6$$
$$359 = 29 \times 12 + 11$$
$$29 = 2 \times 12 + 5$$
$$2 = 0 \times 12 + 2$$

प्राप्त होते हैं।

अतः

$$(51778)_{10} = (25\ \beta\ 6\alpha)_{12}.$$

प्रश्नावली

1. निम्नलिखित का आधार दस में रूपान्तर कीजिए ।

(i) $(1111011)_2$ (ii) $(210221)_3$

(iii) $(20130)_4$ (iv) $(40213)_5$

(v) $(53400)_6$ (vi) $(6666)_7$

(vii) $(732104)_8$ (viii) $(\alpha 00\alpha 2)_{11}$

(xi) $(3\alpha 0\beta\alpha 5)_{12}$

2. निम्नलिखित को निर्देशानुसार प्रदर्शित कीजिए :—

(i) $(45)_{10}$ को आधार 2 में, (ii) $(725)_{10}$ को आधार 6 में

(iii) $(95)_{10}$ को आधार 3 में, (iv) $(213)_{10}$ को आधार 4 में

(v) $(2345)_{10}$ को आधार 5 में (vi) $(77335)_{10}$ को आधार 7 में

(vii) $(4444)_{12}$ को आधार 8 में (vii) $(553370)_{10}$ को आधार 9 में

(ix) $(1000001)_{10}$ को आधार 11 में (x) $(730245)_{10}$ को आधार 12 में ।

3. निम्नलिखित को निर्देशानुसार प्रदर्शित कीजिए :—

(i) $(\beta\alpha)_{12}$ को आधार 2 में (ii) $(\alpha 0)_{12}$ को आधार 5 में

(iii) $(1\alpha)_{11}$ को आधार 6 में (iv) $(101010)_2$ को आधार 7 में

(v) $(2341)_7$ को आधार 9 में (vi) $(34254)_6$ को आधार 2 में

(vii) $(331100)_9$ को आधार 11 में (viii) $(2010)_3$ को आधार 2 में

(ix) $(43205)_8$ को आधार 7 में (x) $(3021)_4$ को आधार 8 में ।

द्वि-आधारी पद्धति—

कम्प्यूटर तकनीक में द्वि-आधारी संख्यान पद्धति के अत्यधिक महत्त्व को समझते हुए हम नीचे इस पद्धति में योग, गुणन और व्यवकलन करने की प्रक्रियाएँ प्रदर्शित कर रहें हैं । उदाहरण हल करने से पूर्व हम नीचे इस पद्धति में योग और गुणन की सारणियाँ दे रहे हैं । आधार दो हैं और प्रयुक्त प्रतीक 0 और 1 हैं ।

योग-सारणी

+	0	1
0	0	1
1	1	10

गुणन-सारणी

×	0	1
0	0	0
1	0	1

क्योंकि सर्वत्र आधार 2 है इसलिए हम पादांक 2 को छोड़ रहे हैं ।

उदाहरण—

1. 1101 और 1110 का योगफल निकालिए।

हल

$$\begin{array}{r} 1101 \\ +1110 \\ \hline 11011 \end{array}$$

योग सारणी के अनुसार 1 और 0 का योगफल 1 है और 0 और 1 का योगफल भी 1 है। हम रेखा के नीचे दाईं ओर के पहले और दूसरे स्तम्भों का योगफल 1 और 1 लिखते हैं। साथ ही 1 और 1 का योगफल 10 है। तीसरे स्तम्भ के नीचे हम 0 लिखते हैं और 1 को चौथे स्तंभ में ले जाते हैं। पुनः इस लाए गए 1 और चौथे स्तंभ में दिए हुए 1 का योगफल, 1 और 10 के योगफल के बराबर होगा जो कि 11 है।

अतः

$$1101+1110=11011.$$

2. 1010 और 101 का गुणनफल निकालिए।

हल

$$\begin{array}{r} 1010 \\ \times\ 101 \\ \hline 1010 \\ 0000 \\ 1010 \\ \hline 110010 \end{array}$$

गुणन का परिकलन गुणन-सारणी के प्रयोग से ठीक उसी भाँति किया जाता है जैसे यह दशमलव पद्धति में किया जाता है। हमें योग-सारणी का प्रयोग भी करना पड़ेगा। उदाहरणार्थ, चौथे स्तंभ 1+0+1 को जोड़ने पर योगफल 10 प्राप्त होता है। हम स्तभ के नीचे शून्य लिख देते हैं और 1 को अगले स्तंभ में ले जाते हैं।

अतः

$$1010\times 101=110010.$$

3. 11010 में से 101 को घटाइए।

हल

$$\begin{array}{r} 11010 \\ -\quad 101 \\ \hline 10101 \end{array}$$

नितांत दाहिनी ओर के स्तंभ में हम देखते हैं कि 1>0, और इस कारण हम 0 में से 1 को नहीं घटा सकते। पहली पंक्ति के दूसरे स्थान से 1 उधार लेते हैं। यह पहले स्थान में 10 हो जाता है। 10 में से 1 को घटाने पर हम 1 प्राप्त करते हैं जिसे रेखा के नीचे लिख दिया जाता है। दूसरे स्थान में 0 हो जाता

है जिसमें से 0 घटाने पर रेखा के नीचे दूसरे स्थान में 0 प्राप्त होता है। पुनः हम चौथे स्थान से 1 उधार लेते हैं तीसरे स्थान में 10 हो जाता है। इसमें से 1 को घटाने पर रेखा के नीचे तीसरे स्थान में 1 प्राप्त होता है। रेखा के नीचे शेष स्थानों में स्पष्टतः क्रमशः 0 और 1 होगा। अतः

$$11010-101=10101.$$

विद्यार्थी यह जाँच करे कि 10101 मे 101 को जोड़ने पर 11010 प्राप्त होता है।

प्रश्नावली

1. दो आधार होने पर निम्नलिखित का परिकलन कीजिए :—

   (*i*) $1111+1011$ (*ii*) $100100+11011$

   (*iii*) 1110×11001 (*iv*) 1010×1010

   (*v*) $101101-10011$ (*vi*) $10010-1001$

2. निम्नलिखित संख्याओं को आरोही क्रम में लिखिए :—

   (*i*) 1000, 1010, 111, 1100

   (*ii*) 101, 11, 111, 100, 110

   (*iii*) 1010, 1001, 1100, 1000.

3. चिह्न '?' को उपयुक्त प्रीतक > अथवा < द्वारा प्रतिस्थापित कीजिए :—

   (*i*) 1010 ? 1001 (*ii*) 100101 ? 101101

   (*iii*) 111 ? 1000 (*iv*) 10110 ? 10011.

परीक्षण-पत्र

परीक्षण-पत्र 1

1. (क) यदि

$$A=\{2, 0, 3, 7, 4, 8\},\ B=\{7, 9, 6, 8, 0, 11\},$$

तो समुच्चयों

$$A \cup B,\ A \cap B$$

को सूचीबद्ध कीजिए।

(ख) ऐसी पाँच परिमेय संख्याएँ, जो पूर्ण सख्याएं न हों और पाँच पूर्ण संख्याएँ, जो धन-संख्याएँ न हों, दीजिए।

2. किन्हीं दो संख्याओं के **म स** की परिभाषा दीजिए।

24 और 42 के खंडों के समुच्चय लिखिए। ये समुच्चय सान्त हैं अथवा अनन्त ? इनका सर्वनिष्ठ समुच्चय निकालिए। इस समुच्चय के न्यूनतम और अधिकतम अंग लिखिए। दत्त संख्याओं का **म स** भी निकालिए।

3. a और b के धन-संख्याएँ होने पर कथन 'a खंड है b का' का क्या अर्थ है ? सिद्ध कीजिए कि यदि a खंड हो b का और b खंड हो c का तो a खंड होगा c का।

सिद्ध कीजिए कि

$$a \mid b \Rightarrow a \leqslant b.$$

4. (क) अभाज्य संख्या की परिभाषा दीजिए और सिद्ध कीजिए कि अभाज्यों का समुच्चय अनन्त है।

(ख) संख्याओं 2768 और 3600 को अभाज्य खंडों के गुणनफलों के रूप में व्यक्त कीजिए और उनका **ल स** निकालिए।

5. (क) चर का प्रभाव-क्षेत्र **N** होने पर

$$3x+2=1$$

का सत्य समुच्चय निकालिए। चर का प्रभाव-क्षेत्र **Q** लेने पर सत्य समुच्चय में क्या परिवर्तन होगा ?

(ख) चर का प्रभाव-क्षेत्र विषम धन-संख्याओं का समुच्चय होने पर

$$5x+3 \leqslant 28$$

का सत्य समुच्चय निकालिए।

6. (क) परिमेय संख्याओं के समुच्चय **Q** में वितरण-नियम का उल्लेख कीजिए। इसे तथा योग और गुणन के क्रम-विनिमेय और साहचर्य नियमों को मानकर सिद्ध कीजिए कि

$$(a+b)^2=a^2+2\,ab+b^2 \;\forall\; a, b \in \mathbf{Q}.$$

(ख) परिमेय संख्याओं a, b, c के लिए सिद्ध कीजिए कि,

$$a>b \Leftrightarrow a+c>b+c.$$

7. (क) किसी भिन्न को दशमलव भिन्न कब कहते हैं ? सिद्ध कीजिए कि दो दशमलव भिन्नों का योगफल और गुणनफल दशमलव भिन्न ही होता है।

(ख) संख्याओं के निम्नलिखित समुच्चयों को आरोही क्रम में लिखिए।

$$(i)\quad \left\{\frac{2}{3},\ \frac{13}{15},\ 0,\ -{\cdot}75,\ 1{\cdot}25\right\}$$

$$(ii)\quad \{-1{\cdot}27,\ -3{\cdot}24,\ -2{\cdot}5,\ {\cdot}04,\ {\cdot}75\}.$$

8. (क) किसी परिमेय संख्या x के निरपेक्ष मान $|x|$ की परिभाषा दीजिए। x का प्रभाव-क्षेत्र $\mathbf{Q}$ होने पर

$$|2x-3|=4$$

का सत्य समुच्चय निकालिए।

(ख)
$$\begin{cases}7x-5y+11=0\\2x+3y-7=0\end{cases}$$

का सत्य समुच्चय निकालिए।

9. (क) समीकरण

$$ax+b=0$$

और
$$lx=m$$

का संगति-प्रतिबंध निकालिए।

(ख) यदि संभव हो तो

$$8x^2+13x-6$$

को परिमेय गुणांकों वाले रैखिक खंडों के गुणनफल के रूप में व्यक्त कीजिए।

10. (क) $6x^2-43x+20=0,\ x\in \mathbf{Q}$

का सत्य समुच्चय निकालिए।

(ख) दो परीक्षा कक्ष क और ख हैं। यदि क में से 10 परीक्षार्थी ख में भेज दिए जाएँ तो दोनों में संख्या बराबर हो जाती है और ख में से 20 परीक्षार्थी क में भेज दिए जाएँ तो क में परीक्षार्थियों की संख्या ख में परीक्षार्थियों की संख्या से दुगुनी हो जाती है। प्रत्येक कक्ष में परीक्षार्थियों की संख्या बताइए।

परीक्षण-पत्र II

1. (क) यदि

$$A=\{1, 3, 5, 7\},\ B=\{2, 4, 6, 8\},\ C=\{0, 4, 5\}$$

तो समुच्चय $A\cap B$, $B\cap C$, $(A\cap B)\cap C$ क्या होंगे ?

(ख) पाँच ऐसे भिन्न जो पूर्ण संख्याएँ न हों और पाँच ऐसी पूर्ण संख्याएँ जो भिन्न न हों दीजिए।

2. किन्हीं दो संख्याओं के ल स की परिभाषा दीजिए।

4 और 6 के अपवर्त्यों के समुच्चय लिखिए। ये समुच्चय सान्त हैं अथवा अनन्त ? इनका सर्वनिष्ठ समुच्चय निकालिए। क्या इस समुच्चय का अधिकतम अंग है ? इस सर्वनिष्ठ समुच्चय का न्यूनतम अंग क्या है ? दत्त संख्याओं का ल स निकालिए।

3. a और b के धन-संख्याएँ होने पर कथन 'a खंड है b का' का क्या अर्थ है ?

सिद्ध कीजिए कि यदि a खंड हो b और c दोनों का, तो a खंड होगा $b+c$ का।

सिद्ध कीजिए कि $a \mid b,\ b \mid a \Rightarrow a=b.$

4. (क) अद्वितीय अभाज्य गुणनखंडन प्रमेय का उल्लेख करके इसकी उपपत्ति कीजिए।

(ख) सिद्ध कीजिए कि किन्हीं तीन क्रमागत धन-संख्याओं का गुणनफल 6 से विभाज्य है।

5. (क) चर का प्रभाव-क्षेत्र $\mathbf{Q}$ होने पर

$$2x=6$$

का सत्य समुच्चय निकालिए। चर का प्रभाव-क्षेत्र $\mathbf{N}$ या $\mathbf{F}$ या सम धन-संख्याओं का समुच्चय होने पर सत्य समुच्चय में क्या परिवर्तन होगा ?

(ख) चरों का प्रभाव-क्षेत्र $\mathbf{N}$ होने पर

$$2x+3y=11$$

का सत्य समुच्चय निकालिए। यह सत्य समुच्चय सान्त है अथवा अनन्त ? यदि प्रभाव-क्षेत्र $\mathbf{Q}$ हो जाए तो क्या सत्य समुच्चय सान्त होगा ?

6. (क) परिमेय संख्याओं a, b, c के लिए सिद्ध कीजिए कि

$$a=b \Leftrightarrow a+c=b+c.$$

(ख) किन्हीं परिमेय संख्याओं x और y के लिए सिद्ध कीजिए कि

$$-(x+y)=(-x)+(-y).$$

7. (क) दशमलव भिन्न की परिभाषा दीजिए।

यदि a/b और c/d दो दशमलव भिन्न हों तो क्या $a/b \div c/d$ सदैव दशमलव भिन्न होगा ? अपने उत्तर का तर्कपूर्ण समर्थन कीजिए।

(ख) संख्याओं के निम्नलिखित समुच्चयों को अवरोही क्रम में लिखिए :—

(i) $\left\{\frac{1}{2},\ \frac{3}{4},\ 0,\ -\frac{1}{4},\ -\frac{5}{6}\right\}$

(ii) $\{0,\ \cdot74,\ \cdot77, -\cdot73,\ -\cdot79\}$.

8. (क) सिद्ध कीजिए कि द्विघात समीकरण

$ax^2+bc+c=0.\qquad a,\ b,\ c \in \mathbf{Q},\ a \neq 0$

का केवल एक ही मूल $-b/a$ होता है यदि $b^2-4ac=0$.

(ख) यदि संभव हो तो

$$10x^2+15x-4$$

को परिमेय गुणांकों वाले रैखिक खंडों के गुणनफल के रूप में व्यक्त कीजिए।

9. (क) a, b के विभिन्न परिमेय संख्याएँ होने पर समीकरण

$$x+y+1=0$$
$$ax+by+c=0$$
$$a^2x+b^2y+c^2=0$$

का संगति-प्रतिबंध निकालिए। यहां c कोई अंग है **Q** का।

(ख) निम्नलिखित निकाय का सत्य समुच्चय निकालिए :—

$$\begin{cases} 2x-3y+z-5=0 \\ 3x+4y-5z+8=0 \\ x+24y-19z+40=0 \end{cases}$$

10. (क) ऐसा भिन्न निकालिए जिसके अंश में 15 जोड़ने पर वह 3 हो जाए और हर में 11 जोड़ने पर $\frac{1}{3}$ हो जाए।

(ख) क, ख से दो वर्ष बड़ा है, ख, ग से तीन वर्ष बड़ा है और इन तीनों की आयु का योगफल घ की आयु का आधा है। 10 वर्ष पश्चात् क, ख, ग की आयु का योगफल घ की उस समय की आयु के बराबर हो जाएगा। उनकी वर्तमान आयु निकालिए।

परीक्षण-पत्र III

1. (क) यदि

$$A=\left\{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right\}, B=\left\{1, 2, 3, 4\right\}, C=\left\{\frac{1}{2}, 3\right\}$$

तो समुच्चय

$$A\cap B, B\cup C, (A\cup B)\cup C, A\cap(B\cup C)$$

क्या हैं ?

(ख) पाँच ऐसे भिन्न दीजिए जो धन-संख्याएँ न हों। यदि संभव हो तो एक ऐसी धन-संख्या दीजिए जो भिन्न न हो।

2. किन्हीं दो संख्याओं के **म स** की परिभाषा दीजिए।

63, 45, 27 के खंडों के समुच्चय लिखिए। इनका सर्वनिष्ठ समुच्चय निकालिए। इस समुच्चय के अधिकतम और न्यूनतम अंग क्या हैं ? दत्त संख्याओं का **म स** निकालिए।

3. धन-संख्याओं के समुच्चय में 'खंड है…का' संबंध के परावर्ती होने का क्या अर्थ है ?

सिद्ध कीजिए कि 1 से विभिन्न प्रत्येक धन-संख्या के कम से कम दो खंड होते हैं। संख्या 1 के खंड क्या हैं ?

4. (क) गॉस प्रमेय का उल्लेख और इसकी उपपत्ति कीजिए।

(ख) सिद्ध कीजिए कि 1 से विभिन्न प्रत्येक धन-संख्या का कोई न कोई अभाज्य खंड होता है।

5. (क) किन्हीं दो परिमेय संख्याओं x और y के लिए क्या

$$x-y$$

सदैव सार्थक होता है ? अपने उत्तर का समर्थन कीजिए। यदि x और y कोई भिन्न होते तो आपके उत्तर में क्या परिवर्तन हो जाता ?

(ख) $\mathbf{Q}$ के विभिन्न फील्ड नियमों के आधार पर सिद्ध कीजिए कि

$$(-x)\,(y)=-(xy) \qquad \forall\ x,\ y\in\mathbf{Q}$$

और

$$(-x)\,(-y)=xy \qquad \forall\ x,\ y\in\mathbf{Q}.$$

6. (क) चरों का प्रभावक्षेत्र $\mathbf{N}$ होने पर

$$2x+3y+2z=11$$

का सत्य समुच्चय निकालिए।

(ख) यदि $a,\ b,\ c$ कोई अंग हों $\mathbf{Q}$ के, तो सिद्ध कीजिए कि

$$a>b,\ c>o\Rightarrow ac>bc.$$

7. (क) कथन 'भिन्नों का समुच्चय क्रम घन है' का क्या अर्थ है ? इसे सिद्ध कीजिए।

(ख) निम्नलिखित में से कौन-से कथन सत्य हैं :—

$$(i)\ -7>3\ \ (ii)\ -2>3\ \ (iii)\ \frac{3}{4}<\frac{13}{14}.$$

8. (क) सरल कीजिए :—

$$\frac{3x^2y+8xy^2}{2x+3y}\cdot\frac{4x^2+12xy+9y^2}{3xy^2+8y^3}$$

(ख) x का प्रभाव-क्षेत्र $\mathbf{Q}$ होने पर

$$4x^2+3x-10\leqslant 0$$

का सत्य समुच्चय निकालिए।

9. (क) द्विघात समीकरण

$$ax^2+bx+c=0 \qquad a,\ b,\ c\in\mathbf{Q},a\neq 0$$

के दो मूल होने का प्रतिबंध निकालिए। मूल भी निकालिए।

(ख) सिद्ध कीजिए कि निम्नलिखित समीकरण आश्रित हैं :—

$$x+7y-3z+2=0$$

$$4x-2y+z-3=0$$

$$3x-39y+17z-16=0$$

10 (क) पाँच घंटे में एक नौका जलधारा के प्रतिकूल 15 कि. मी. और अनुकूल 22 कि. मी. जाती है। $5\frac{1}{2}$ घण्टे में वह धारा के प्रतिकूल 20 कि. मी. और अनुकूल $27\frac{1}{2}$ कि. मी. भी जाती है। धारा की और स्थिर जल में नौका की गति निकालिए।

(ख) दो धन-संख्याओं का गुणनफल 45 है। यदि एक दूसरी से 4 कम हो तो दोनों संख्याएँ निकालिए।

परीक्षण-पत्र IV

1. (क) यदि

$$A=\left\{0, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{2}, -1\right\},\ B=\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right\}, C=\left\{0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\}$$

तो निम्नलिखित में से कौन-से कथन सत्य हैं ?

$$C\subset B,\ B\subset C,\ C\subset (A\cup B),\ C\subset (A\cap B).$$

(ख) ऐसी चार परिमेय संख्याएँ लिखिए जो भिन्न न हों। यदि संभव हो तो एक ऐसा भिन्न बताइए जो परिमेय संख्या न हो।

2. किन्हीं तीन संख्याओं के ल स की परिभाषा दीजिए। 5, 10 और 15 के अपवर्त्यों के समुच्चय लिखिए। इनका सर्वनिष्ठ समुच्चय निकालिए। क्या इस समुच्चय का अधिकतम अंग है ? दत्त संख्याओं का **ल स** निकालिए।

3. (क) सिद्ध कीजिए कि 'a अपवर्त्य है b का' के फलस्वरूप a अधिक है b से अथवा बराबर है b के।

(ख) दो संख्याओं को असहभाज्य कब कहते हैं ? असहभाज्यों के पाँच युग्म लिखिए।

4. (क) यदि a और b का **म स** h हो तो सिद्ध कीजिए कि ma और mb का **म स** mh है।

(ख) सिद्ध कीजिए कि दो संख्याओं का गुणनफल उनके **म स** और **ल स** के गुणनफल के बराबर होता है।

5. **Q** के विभिन्न मूल फील्ड नियमों का उल्लेख करके निम्नलिखित परिणामों का निगमन कीजिए :

$$(-x)\ (y)=-xy$$

$$(-x)\ (-y)=xy$$

और

$$(x-y)^2=x^2-2xy+y^2.$$

6. (क) सिद्ध कीजिए कि

$$c\neq 0,\ ac=bc\Rightarrow a=b$$

जहाँ $a, b, c\in \mathbf{Q}$.

(ख) भिन्नों के योग के क्रमविनिमेय और साहचर्य नियमों को मानकर सिद्ध कीजिए कि

$$(x+y)+(z+u)=(x+u)+(z+y)\ \forall x, y, z, u\in \mathbf{F}.$$

प्रत्येक चरण के आधारभूत तर्क दीजिए।

7. (क) सिद्ध कीजिए कि किन्हीं दो भिन्नों के बीच सदैव एक और भिन्न होता है। भिन्नों के स्थान पर धन-संख्याओं के प्रसंग में क्या यह कथन सत्य होगा ?

(ख) (*i*) $\frac{1}{2}$ और $\frac{3}{4}$ के बीच पाँच भिन्न लिखिए।

(*ii*) 3 और 7 के बीच की सभी धन-संख्याएँ लिखिए।

8. (क) समीकरण

$$\frac{9x+8}{18}+\frac{34}{27}+\frac{4x+?}{9}=\frac{21x-8}{18}\ ;\ x\in \mathbf{Q}$$

को हल कीजिए।

(ख) क्या समीकरण

$$ax^2+bx+c=0 \qquad a,\ b,\ c\in \mathbf{Q},\ a\neq 0$$

के दो से अधिक मूल संभव हैं ? अपने उत्तर का समर्थन कीजिए। समीकरण का कोई मूल न होने का प्रतिबंध भी निकालिए।

$$\frac{2}{x}+\frac{1}{y}-\frac{5}{z}+11=0$$

$$\frac{1}{x}-\frac{3}{y}+\frac{2}{z}-1=0$$

$$-\frac{7}{x}+\frac{2}{y}-\frac{4}{z}+15=0.$$

(ख) सिद्ध कीजिए कि निम्नलिखित समीकरण संगत हैं :—

$$x+y-4=0$$

$$3x-2y+3=0$$

$$-4x+7y-17=0.$$

10. (क)

$$(3-x)\ (2x+1)\geqslant 0\ ;\ x\in \mathbf{Q}$$

का सत्य समुच्चय निकालिए।

(ख) एक मनुष्य 15% स्कंध में 143 पर और $10\frac{1}{2}$% स्कंध में 91 पर 31,500 रुपए इस प्रकार लगाना चाहता है कि दोनों से उसकी आय बराबर हो। प्रत्येक स्कंध में वह कितने-कितने रुपए लगाए ?

परीक्षण-पत्र V

1. (क) यदि

$$A=\left\{\frac{1}{2},\ 1,\ \frac{3}{2},\ 2\right\},\quad B=\left\{\frac{1}{2},\ 1,\ \frac{3}{2},\ 2,\ 3,\ 4\right\}$$

तो समुच्चय $A\cap B$, $A\cup B$ क्या हैं ?

निम्नलिखित कथनों में से कौन-से सत्य हैं ?

$$A=B,\ A\subset B,\ B\subseteq A.$$

(ख) सात ऐसी परिमेय संख्याएँ लिखिए जो धन-संख्याएँ न हों। क्या कोई ऐसी धन-संख्या है जो परिमेय संख्या न हो ?

2. किन्हीं तीन संख्याओं के **म स** की परिभाषा दीजिए। 45, 63, 20 के खंडों के समुच्चय लिखिए। उनका सर्वनिष्ठ समुच्चय निकालिए। यह सान्त है अथवा अनन्त ? इसके अधिकतम और न्यूनतम अंग क्या हैं ? दत्त संख्याओं का **म स** निकालिए।

3. (क) यदि a और b दो ऐसी धन-संख्याएँ हों जिनमें $a>b$ और b खंड नहीं है a का, तो सिद्ध कीजिए कि दो संख्याएँ (अद्वितीय) q और r विद्यमान हैं जिनके लिए

$$a=bq+r \qquad r<b.$$

(ख) (i) अभाज्य संख्या, और (ii) असहभाज्य संख्या-युग्म की धारणाओं में भेद कीजिए।

4. (क) सिद्ध कीजिए कि दो संख्याओं a और b का **म स** तब और तभी h होता है जब h खंड हो a और b का तथा दो संख्याएँ $a\,/\,h$ और $b\,/\,h$ असहभाज्य हों।

(ख) संख्याओं 375, 240, 390, 585 को अभाज्य खंडों के गुणनफलों के रूप में व्यक्त कीजिए और उनका **म स** निकालिए।

5 (क) Q के फील्ड नियमों को मानकर सिद्ध कीजिए कि

$$\frac{1}{xy}=\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{y}\ \forall\ x, y\in \mathbf{Q}$$

(ख) सिद्ध कीजिए कि

$$x>y,\ z<0\Rightarrow xz<yz, \text{ जहाँ } x, y, z\in \mathbf{Q}.$$

6. (क) $x\in \mathbf{F}$ होने पर व्यंजक $\dfrac{3x+4}{5-2x}$ सार्थक हो तो x पर कौन-से प्रतिबंध लगाने पड़ेंगे ?

(ख) यदि $x\in \mathbf{N}$ तो

$$3+8x\geqslant 11$$

का सत्य समुच्चय निकालिए। यह सत्य समुच्चय सान्त है अथवा अनन्त ?

7. (क) सिद्ध कीजिए कि किन्हीं दो विभिन्न परिमेयों के बीच में सदैव कोई परिमेय संख्या होता है।

परिमेयों के स्थान पर पूर्ण संख्याओं के प्रसंग में क्या यह परिणाम सत्य होगा ? इसका सत्य न होना सिद्ध करने के लिए प्रति—उदाहरण दीजिए।

(ख) -11 और -12 के बीच में आने वाली पूर्ण संख्याओं का समुच्चय क्या है ?

8. (क) x के लिए

$$\frac{x+3}{2x-5}-\frac{3x-4}{6x+11}=0\ ;\ x\in \mathbf{Q}$$

को हल कीजिए।

(ख) $$|2x+7|\leqslant 3\ ;\ x\in \mathbf{Q}$$

का सत्य समुच्चय निकालिए।

9. (क) सिद्ध कीजिए कि समीकरण

$$2x-y+7z+5=0$$
$$6x-3y+21z+7=0$$

असंगत हैं।

(ख) निम्नलिखित समीकरण निकाय हल कीजिए :—

$$\frac{2}{x}-\frac{3}{y}+5=0$$
$$\frac{3}{x}+\frac{2}{y}+4=0$$

10. (क) तीन नलों को एक साथ खोल देने पर कोई जलाशय $7\frac{1}{2}$ घंटे में भर जाता है। एक नल इसे 6 घंटे में और दूसरा 15 घंटे में भर सकता है। तीसरे नल का क्या कार्य है ?

(ख) अनिल अपनी साइकिल से 30 कि. मी. जाता है। वह जितने कि. मी. प्रतिघंटा की औसत गति से जाता है उतने से एक घंटे कम में यात्रा पूरी कर लेता है। यात्रा पूरी करने में उसे कितना समय लगा।

उत्तरमाला

अध्याय 1

पृष्ठ 3

(*iii*), (*v*), (*vii*), (*viii*), (*ix*) : हाँ।

(*i*), (*ii*), (*iv*), (*vi*) : नहीं।

पृष्ठ 5

1. क्रम विनिमेय नियम।
3. (*i*) 12, (*ii*) 15, (*iii*) 19, (*iv*) 9, (*v*) 39, (*vi*) 105, (*vii*) 33, (*viii*) 14.

पृष्ठ 7

1. साहचर्य नियम।
3. (*i*) 5, (*ii*) 13, (*iii*) 11, (*iv*) 12, (*v*) 13, (*vi*) 17.

पृष्ठ 8

1. (*i*) 58, (*ii*) 400, (*iii*) 531, (*iv*) 733, (*v*) 124, (*vi*) 228, (*vii*) 58, (*viii*) 177.
2. (*i*) 8, (*ii*) 4, (*iii*) 14, (*iv*) 7, (*v*) 9, (*vi*) 9.
3. (*i*) 50, (*ii*) 92, (*iii*) 209, (*iv*) 209.

पृष्ठ 9

1. क्रम विनिमेय नियम।
3. (*i*) 24, (*ii*) 69, (*iii*) 47, (*iv*) 61.

पृष्ठ 10

1. साहचर्य नियम।
3. (*i*) 25, (*ii*) 21, (*iii*) 9, (*iv*) 13, (*v*) 7, (*vi*) 111.

पृष्ठ 11

1. (*i*) 27, (*ii*) 27, (*iii*) 5, (*iv*) 15, (*v*) 13, (*vi*) 4.
2. (*i*) 380, (*ii*) 577300, (*iii*) 8400, (*iv*) 1624000, (*v*) 360, (*vi*) 390, (*vii*) 2460, (*viii*) 1650.

पृष्ठ 13

1. वितरण नियम।
3. (*i*) 13, (*ii*) 23, (*iii*) 27, (*iv*) 23, (*v*) 41, (*vi*) 9,

4. (*i*) 9, य क, य स, (*ii*) 7, व, ग क, य क, (*iii*) 27, य क, (*iv*) 109, य स, (*v*) 4, व, (*vi*) व, ग क, य क, (*vii*) 22, ग क, व, (*viii*) 72, व, य क, ग क, ग स, (*ix*) 12, व ग स।

पृष्ठ 14

1. (*i*) 2900, (*ii*) 3700, (*iii*) 2960, (*iv*) 860, (*v*) 390, (*vi*) 820.
2. (*i*) 137, (*ii*) 77, (*iii*) 6700, (*iv*) 37000, (*v*) 9400, (*vi*) 13700, (*vii*) 8900, (*viii*) 188, (*ix*) 1740, (*x*) 999000, (*xi*) 99990000, (*xii*) 8370000.

पृष्ठ 15

(*i*) 125, (*ii*) 36, (*iii*) 256, (*iv*) 343, (*v*) 625, (*vi*) 81, (*vii*) 10000, (*viii*) 25, (*ix*) 729, (*x*) 256, (*xi*) 3200000, (*xii*) 216.

पृष्ठ 16

1. (*i*) 7^6, (*ii*) x^6, (*iii*) x^4, (*iv*) x^3y, (*v*) x^4y^6, (*vi*) x^3y^4, (*vii*) x^9y^3, (*viii*) 5^6, (*ix*) 3^6, (*x*) 7^7, (*xi*) 5^7, (*xii*) 8^4.
2. (*i*) 36, (*ii*) 108, (*iii*) 2000, (*iv*) 4000.

पृष्ठ 17

(*i*) $12a$ (*ii*) $6a$ (*iii*) $6a + 3b$
(*iv*) $4a + 7b$ (*vii*) $3a + 8b$ (*vi*) $2x + y + z$.

पृष्ठ 18

(*i*) 2 (*ii*) 2 (*iii*) 9
(*iv*) 4 (*v*) 2 (*vi*) 4
(*vii*) 5 (*viii*) 6 (*ix*) 4
(*x*) 6.

पृष्ठ 19

1. (*i*) 1 (*ii*) 2 (*iv*) 3 (*vi*) 4
(*vii*) 6 (*ix*) 7 (*x*) 11.
2. (*i*) 2 (*iv*) 3.
3. (*i*) 2 (*iv*) 3 (*v*) 5.
4. (*i*) a (*ii*) ab (*iii*) a^2b^2 (*iv*) b
(*v*) a^2b (*vi*) $2a$ (*vii*) a^2 (*viii*) $4a^2b^2$
(*ix*) $9b^4c^6$.

पृष्ठ 23

(*i*) $3(x + y)$ (*ii*) $a(x + y)$ (*iii*) $2x(y + z)$
(*iv*) $3x(y + z)$ (*v*) $x(4y + 5z)$ (*vi*) $(a + b)(2x + 3y)$
(*vii*) $2y(4 + 3x)$ (*viii*) $a(a + 2)$ (*ix*) $x^2(x + 1)$
(*x*) $xy(3x + 5y)$ (*xi*) $3(x + y + z)$ (*xii*) $3(ax + 2by + 3c)$
(*xiii*) $x(yz + xy + xz)$ (*xiv*) $8(x + y)$ (*xv*) $(2 + 3a)(x + 3y)$
(*xvi*) $(a + b)(2x + 5y)$ (*xvii*) $(a + b)(x + y)$
(*xviii*) $(2x + 3)(3y + 4)$ (*xix*) $(4a + 1)(b + 4)$
(*xx*) $(x + 1)(y + 2)$ (*xxi*) $(u + 2)(v + 2)$ (*xxii*) $(a + y)(a + x)$.

पृष्ठ 26

2. (*i*) $12 > 11$. (*ii*) $15 > 5$ (*iii*) $24 > 21$ (*iv*) $37 > 12$.

3. सत्य : (*ii*), (*v*), (*vii*), (*x*), (*xii*), (*xiv*), (*xvi*), (*xix*).

मिथ्या : (*i*), (*iii*), (*iv*), (*vi*), (*viii*), (*ix*), (*xi*), (*xiii*), (*xv*), (*xvii*), (*xviii*), (*xx*).

पृष्ठ 39–40

1. (*i*) {18} (*ii*) {12} (*iii*) {26}
(*iv*) {3} (*v*) {26} (*vi*) {57}
(*vii*) रिक्त (*viii*) {8} (*ix*) रिक्त
(*x*) {3} (*xi*) {4} (*xii*) {2}
(*xiii*) रिक्त (*xiv*) {7} (*xv*) रिक्त।

2. (*i*) {3, 4, 5, ...} (*ii*) {4, 5, 6, ...} (*iii*) {6, 7, 8, ...}
(*iv*) {1, 2, 3, ...} (*v*) रिक्त (*vi*) { 1 }
(*vii*) रिक्त (*viii*) {2, 3, 4, ...} (*ix*) {1, 2, 3, ...}

3. (*i*) { 3 } (*ii*) रिक्त (*iii*) { 1 }
(*iv*) {1, 3} (*v*) {5, 7, 9, ...} (*vi*) {1, 3, 5, 7}.

पृष्ठ 40

(*i*) (1, 15), (2, 13), (3, 11), (4, 9), (6, 5), (7, 3), (8, 1)

(*ii*) (3, 5), (6, 3), (9, 1) (*iii*) कोई हल नहीं (*vi*) कोई हल नहीं।

पृष्ठ 43

1. (*i*) 14 (*iii*) 2.
2. (*i*) 1, 2, 3 (*ii*) 10, 11, 12, ... (*iii*) 3.
3. (*i*) 104 (*ii*) 1 (*iii*) 11, 12, 13, ...
(*iv*) कोई हल नहीं (*v*) (1, 2) (*vi*) (1, 2).

पृष्ठ 46

1. (*i*) 2 (*ii*) 1.
2. (*i*) 3 के अपवर्त्य (*ii*) 1, 3 (*iii*) सभी विषम संख्याएँ
(*iv*) 2, 5, 11, 29 (*v*) 1, 3, 4, 5, 6 (*vi*) 9, 16, 23, 30, ...
3. (*i*) {14} (*ii*) { 2 } (*iii*) {16}
(*iv*) {15, 18, 21, ...} (*v*) {1, 2, 4} (*vi*) { 1 }.

पृष्ठ 50

(*iii*) {1, 2, 3, ...} (*iv*) {1, 2, 3, 4} (*ix*) { 1 }
(*x*) {3, 4, 5, ...}.

पृष्ठ 51

सत्य : (*i*)

मिथ्या : (*ii*), (*iii*), (*iv*).

पृष्ठ 51

सत्य : (*i*), (*ii*), (*iv*), (*v*), (*vi*), (*vii*), (*viii*).

मिथ्या : (*iii*)

पृष्ठ 52

(*i*) {1, 13} (*ii*) {1, 5, 25} (*iii*) {1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36}
(*iv*) {1, 53} (*v*) { 1 } (*vi*) {1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24}
(*vii*) {1. 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60}.
(*viii*) {1, 3, 5, 9, 15, 45}.

पृष्ठ 54

(*i*) ϕ, { 1 }, { 3 }, { 5 }, {1, 3}, {3, 5}, {1, 5}, {1, 3, 5}
(*ii*) ϕ, { 7 } (*iii*) ϕ, { 2 }, { 6 }, {2, 6} (*iv*) ϕ.

पृष्ठ 55

(*i*) 2 विद्यमान नहीं (*ii*) 2,256 (*iii*) 10 विद्यमान नहीं
(*iv*) 10, 70 (*v*) 1, 1.

पृष्ठ 55–56

1. (*i*) {1, 2, 3, 4} (*ii*) {1, 3, 4, 6, 7, 9}
(*iii*) {1, 2, 3, 5, 6, 12, 15}.
{1, 2, 4, 6, 7, 8, 9}.

4. क्रम विनिमेयता और सहचारिता।

पृष्ठ 56–57

1. (*i*) {1, 2, 3} (*ii*) ϕ (*iii*) {1, 3}.
2. ϕ.

पृष्ठ 60

(*i*) 5, 2 (*ii*) 286 विभाज्य है 11 से (*iii*) 33, 14
(*iv*) 413, 1 (*v*) 222, 5 (*vi*) 100, 7.

पृष्ठ 62

1. (*i*) $x(x + 1) = 18$, छोटी संख्या x है।
(*ii*) $x + (x + 13) = 57$, ,, ,, ,, ।
(*iii*) $x + (x + 13) = 57$, x बालिकाओं की संख्या का सूचक है।
(*iv*) $x + (2x + 3) = 63$, x पुत्र की आयु का सूचक है।
(*v*) $2\{x + (x + 3)\} = 42$, x आयत की चौड़ाई का सूचक है।

पृष्ठ 65–66

(1) 28, 29 (2) ऐसी कोई संख्या नहीं। (3) 33, 35 (4) 80, 88 (5) 26, 27, 28 (6) 34, 36, 38 (7) 107, 109, 111 (8) 29, 75 (9) 2 (10) 8 (11) {1, 2, 3, 4, 5, 6} (12) {2, 3, 4, 5, 6, 7} (13) नहीं (14) नहीं (15) 30 किलो. मी. (16) {1, 2, 3, 4, 5, 6} (17) {4, 5} (18) 3 (19) 6, 11, 19 (20) 59, 60, 61 (21) 51, 41 (22) 18 (23) कृष्ण 56, श्याम 112, राम 132 (24) 11, 39 (25) 35, 10 (26) पुत्र 20, पिता 45 (27) पुत्र 21, पिता 39 (28) 53 (29) 42.

सिंहावलोकन प्रश्नावली : पृष्ठ 66—69

1. {2, 3, 5, 7, 8, 9, 13, 17}, {4, 5, 6, 7, 8, 9, 12 14, 16, 17}
{2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 12, 13, 14, 16}
{7, 8, 9}, ϕ, ϕ
{2, 7, 3, 9, 8, 13}, {7, 8, 9)
{2, 3, 7, 8, 9, 13}, {7, 8, 9).
2. {1, 3, 9}, {1, 3, 9}, {1, 3}, {1, 3}.
3. {x : x अपवर्त्य है 24 का }
4. (*i*) {1, 2, 3} (*ii*) {5, 6, 7} (*iii*) {$x : x \geqslant 4$}.
5. (*i*) {1, 2, 4} (*ii*) {x : x अपवर्त्य है 15 का}
(*iii*) {13, 19, 25,...}.
8. $2^{10} > 1004$.
11. (9, 4), (8, 5), (8, 4), (8, 3), (7, 6), (7, 5), (7, 4), (7, 3), (7, 2), (6, 5), (6, 4), (6, 3), (6, 2), (6, 1), (5, 4), (5, 3), (5, 2), (5, 1), (4, 3), (4, 2), (4, 1), (3, 2), (3, 1), (2, 1).
15. (*i*) 22 (*ii*) 51 (*iii*) 13 (*iv*) 3 (*v*) 14 (*vi*) कोई हल नहीं
(*vii*) कोई हल नहीं (*viii*) कोई हल नहीं (*ix*) कोई हल नहीं
(*x*) कोई हल नहीं (*xi*) कोई हल नहीं (*xii*) 3
(*xiii*) कोई हल नहीं (*xiv*) 5 (*xv*) 2.
16. (*i*) {$x : x > 11$} (*ii*) {$x : x < 14$} (*iii*) ϕ (*iv*) ϕ (*v*) {$x : x < 12$}
(*vi*) {$x : x < 7$} (*vii*) {1, 2, 3} (*viii*) {$x : x > 2$} (*ix*) $x : x \geqslant 6$} (*x*) **N**
(*xi*) {$x : x \geqslant 2$} (*xii*) {1, 2}
(*xiii*) {70, 77, 84, 91,...} (*xiv*) {3, 6, 9, 12, 15, 18, 21}
(*xv*) 3, 6, 9, 12, 15} (*xvi*) {3} (*xvii*) {1, 3}
(*xviii*) {$x : x \geqslant 8$} (*xix*) {1, 2, 3} (*xx*) {$x : x \geqslant 4$}
(*xxi*) ϕ (*xxii*) **N** (*xxiii*) {$x : x \neq 7$}
(*xxiv*) {$x : x \geqslant 6$} (*xxv*) {1, 2, 3, 4, 5, 6}
(*xxvi*) ϕ (*xxvii*) {$x : x \geqslant 6$}
(*xxviii*) {1, 2}.
17. (*i*) (1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3) (5, 2), (6, 1),
(*ii*) ϕ (*iii*) {$(3x + 4, x) : x \in$ **N**}
(*iv*) {$3x + 3, x) : x \in$ **N**} (*v*) ϕ
(*vi*) {$x, y) : y \geqslant x + 3$} (*vii*) {$x, y) : y \geqslant x + 3$}
(*viii*) (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (1, 7), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6). (2, 7), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (7, 1), (7, 2), (7, 3), (8, 1), (8, 2), (8, 3), (9, 1), (9, 2), (10, 1), (11, 1)
(*ix*) (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (3, 1) (*x*) ϕ.

18. 161, 168 19. 20, 8.

20. धन राशि को इस प्रकार नहीं बांटा जा सकता कि प्रत्येक को पूरे रुपए मिलें।

21. 40 वर्ष। 22. 95 23. 4, 5, 6, 7, 8, 9 मीटर।

24. कृष्णा को 2, 3, 4, 5, 6, 7 टॉफियाँ मिलती हैं और तदनुसार सीता को 2, 4, 6, 8, 10, 12 टॉफियाँ मिलेंगी।

25. 963.

अध्याय 2

पृष्ठ 72–73

1. सत्य : (*i*), (*iii*), (*iv*), (*viii*), (*ix*), (*x*).
   मिथ्या : (*ii*), (*v*), (*vi*), (*vii*).

2. (*i*) {1, 2, 3, 4, 6, 12} (*ii*) {1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48}
   (*iii*) {1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100} (*iv*) {1, 41}
   (*v*) {1, 5, 25, 125} (*vi*) {1, 71}
   (*vii*) {1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 25, 30, 50, 60, 75, 100, 150, 300}
   (*viii*) {1, 61} (*ix*) {1, 3, 41, 123}
   (*x*) {1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 20, 24, 30, 40, 48, 60, 80, 120, 240}.

4. (*i*) {2, 4, 6...} (*ii*) {5, 10, 15...} (*iii*) {7, 14, 21,...}
   (*iv*) {6, 12, 18,...} (*v*) {3, 6, 9,...} (*iv*) {4, 8, 12,...}
   (*vii*) {11, 22, 33,...) (*viii*) {9, 18, 27,...} (*ix*) {10, 100, 1000,...}
   (*x*) **N**.

5. प्रश्न 2 में प्रत्येक समुच्चय का न्यूनतम 1 है और अधिकतम स्वयं संख्या ही है।
   प्रश्न 4 के किसी भी समुच्चय का अधिकतम नहीं है। प्रत्येक का न्यूनतम दत्त संख्या है।

पृष्ठ 78

(*ii*), (*iv*), (*v*), (*vi*), (*ix*), (*x*).

पृष्ठ 78–79

1. (*ii*), (*v*).
2. (*i*), (*iii*), (*v*).

पृष्ठ 79

(*ii*), (*iv*), (*vii*).

पृष्ट 79

(*i*), (*ii*), (*v*).

पृष्ठ 80

सत्य : (*i*), (*ii*), (*v*), (*viii*), (*ix*).
मिथ्या : (*iii*), (*iv*), (*vii*), (*x*).

पृष्ठ 80–81

(*ii*), (*iii*), (*vi*).

पृष्ठ 81

(*ii*), (*v*), (*vi*).

पृष्ठ 81

सत्य : (*i*), (*iii*), (*v*), (*vii*), (*ix*), (*x*)
मिथ्या : (*ii*), (*iv*), (*vi*), (*viii*).

पृष्ठ 82

1. (*i*), (*iv*), (*vi*), (*ix*).
2. सत्य : (*iii*), (*iv*), (*vi*), (*viii*), (*ix*)
   मिथ्या : (*i*), (*ii*), (*v*), (*vii*), (*x*).

पृष्ठ 83–84

3. ऐसी धन संख्या केवल 1 ही है ।
4. नहीं   5. {9}   6. सत्य ।
7. (*i*) 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.
8. (*i*) शून्य (*ii*) एक (*iii*) तीन (*iv*) चार (*v*) छः (*vi*) दस ।

पृष्ठ 88

(*i*) 4 (*ii*) 15 (*iii*) 28 (*iv*) 7 (*v*) 1 (*vi*) 4.

पृष्ठ 92

(*i*) 141 (*ii*) 199 (*iii*) 5 (*iv*) 84.

पृष्ठ 97

(*i*) 1 (*ii*) 42.

पृष्ठ 99

1 (*ii*), (*v*).

पृष्ठ 101–102

1. (*i*) 24 (*ii*) 18 (*iii*) 8 (*iv*) 154 (*v*) 77
   (*vi*) 28 (*vii*) 60 (*viii*) 120 (*ix*) 40 (*x*) 168.
2. (*i*) 20 (*ii*) 42 (*iii*) 30.

पृष्ठ 104

(*i*) 3780 (*ii*) 2520 (*iii*) 80.

पृष्ठ 107

(*i*) $3^3 \times 5^2$ (*ii*) $2^4 \times 3 \times 11$ (*iii*) $2 \times 3^2 \times 5 \times 11$
(*iv*) 2^{10} (*v*) $2^2 \times 3 \times 5 \times 11$ (*vi*) $2^4 \times 5^3 \times 13$
(*vii*) $2 \times 3^4 \times 5^2$ (*viii*) $2^2 \times 3 \times 5 \times 11 \times 17$ (*ix*) $2^4 \times 3^4 \times 7 \times 11$
(*x*) $2^6 \times 3^2 \times 7^2 \times 31$.

पृष्ठ 108–109

1. (*i*) 198 (*ii*) 273 (*iii*) 1 (*iv*) 123 (*v*) 1
(*vi*) 1 (*vii*) 1 (*viii*) 21 (*ix*) 2 (*x*) 61.

2. (*i*) 924 (*ii*) 18900 (*iii*) 101551200 (*iv*) 12600 (*v*) 630
(*vi*) 279734 (*vii*) 3168 (*viii*) 1680 (*ix*) 493284
(*x*) 165672.

सिंहावलोकन प्रश्नावली पृष्ठ 109—111

1. (*ii*), (*iii*), (*iv*).

2. एसी संख्याओं का एक समुच्चय {24, 25, 26, 27, 28} है।

3. 1.

5. एक संख्या सम और दूसरी विषम हो।

7. 1064, 3318 10. 60, 140 11. 100, 126 12. 27, 99. 16. एक 19. 1.

20. शेष 1 या 4 हो सकता है; 5 संख्या का खंड भी हो सकता है।

23. 1, 3, 7, 9, 11, 13, 17, 19, 21, 23, 27, 29, 31, 33, 37, 39, 41, 43, 47, 49.

26. I. (*i*) 27, 45 (*ii*) 126, 234 (*iii*) 240, 312 (*iv*) 12, 408
(*v*) 75, 105 (*vi*) 36, 60 (*vii*) 72, 96

II. (*i*) 144, 450 (*ii*) 36, 42 (*iii*) ऐसी कोई संख्या विद्यमान नहीं।
(*iv*) 18, 150 (*v*) 20, 42.

टिप्पणी—प्राप्त संख्या युग्म अद्वितीय नहीं।

29. 28.

30. (3, 5), (5, 7), (11, 13), (17, 19), (29, 31), (41, 43), (69, 61), (71, 73).

अध्याय 3

पृष्ठ 121

1. (*i*) $\frac{2}{5}$ (*ii*) $\frac{2}{3}$ (*iii*) $\frac{7}{11}$
(*iv*) $\frac{3}{7}$ (*v*) $\frac{123}{1300}$ (*vi*) $\frac{20}{33}$
(*vii*) $\frac{12}{7}$ (*viii*) $\frac{77}{270}$ (*ix*) $\frac{57}{100}$.

2. कोई भी नहीं।

3. (*i*) 3 (*ii*) 48 (*iii*) 6.

4. (i) $\frac{1}{6}$ (ii) $\frac{1}{a}$ (iii) $\frac{b}{3a}$

(iv) $\frac{x}{y}$ (v) $\frac{y}{x^2}$ (vi) $\frac{b^2}{3a^2}$

(vii) $\frac{6x}{13ac}$ (viii) $\frac{2c}{3a}$ (ix) $\frac{12m}{5am}$.

5. (i) $\frac{x}{y}$ (ii) $\frac{2+m}{2+n}$ (iii) $\frac{2x}{3y}$

(iv) $\frac{1+2x}{1}$ (v) $\frac{a}{b}$ (vi) $\frac{1}{2}$

(vii) $\frac{3a+2b+5c}{4(2a+b+3b)}$ (viii) $\frac{5z}{1}$.

6. $\frac{112}{308}, \frac{116}{319}, \frac{120}{330}, \frac{124}{341}$.

7. $\frac{35}{63}, \frac{50}{90}, \frac{60}{108}$.

पृष्ठ 124

1. (i) $\frac{22}{15}$ (ii) $\frac{22}{15}$ (iii) $\frac{127}{72}$ (iv) $\frac{127}{72}$.

2. (i) $\frac{1451}{420}$ (ii) $\frac{1451}{240}$ (iii) $\frac{23}{12}$ (iv) $\frac{23}{12}$.

पृष्ठ 127–128

1. (i) $\frac{8}{15}$ (ii) $\frac{8}{15}$ (iii) $\frac{77}{104}$ (iv) $\frac{77}{104}$

(v) $\frac{135}{308}$ (vi) $\frac{135}{308}$ (vii) $\frac{18}{91}$ (viii) $\frac{18}{91}$.

2. (i) $\frac{5}{6}$ (ii) $\frac{5}{6}$ (iii) $\frac{635}{504}$ (iv) $\frac{635}{504}$.

3. (i) $\frac{ab}{2}$ (ii) $\frac{a}{b}$ (iii) $\frac{3x}{4y}$ (iv) $\frac{a^2b^3}{1}$

(v) $\frac{5x^3y^3}{3}$ (vi) $\frac{x^2y^4z}{2}$ (vii) $\frac{a^2b^4c^2}{1}$. (viii) $\frac{a^2b^4c^2}{1}$

(ix) $\frac{17y^2z^3}{4}$ (x) $\frac{17y^2z^3}{9}$ (xi) $\frac{7a^2b^3}{1}$.

पृष्ठ 132

1. (i) $\frac{11}{7}$ (ii) $\frac{17}{12}$ (iii) $\frac{27}{22}$ (iv) $\frac{3}{2a}$
(v) $\frac{6b}{7a}$ (vi) $\frac{3a}{2}$ (vii) $\frac{1}{a}$ (viii) $\frac{b}{1}$
(ix) $\frac{b^2}{a^2}$.

2. (i) $\frac{14a^2}{15}$ (ii) $\frac{56n^4}{15m}$ (iii) $\frac{6bx}{ay}$ (iv) $\frac{5b}{4}$
(v) $\frac{15}{14}$ (vi) $\frac{4x^2}{3y^2}$.

पृष्ठ 133

(i) $\frac{a^2 + 6b^2}{9b^2}$ (ii) $\frac{b + a}{1}$ (iii) $\frac{1}{1}$ (iv) $\frac{(ad + bc)^2}{b^2d^2}$.

पृष्ठ 135–136

1. (i) $>$ (ii) $>$ (iii) $<$ (iv) $=$ (a) $<$ (vi) $=$
2. (i) $<$ (ii) $<$ (iii) $>$ (iv) $>$ (v) $>$ (vi) $>$
3. (i) $>$ (ii) $<$ (iii) $<$ (iv) $>$ (v) $<$ (vi) $<$
4. (i) $<$ (ii) $<$ (iii) $>$ (iv) $>$ (v) $<$ (vi) $<$
5. (i) $<$ (ii) $<, <$ (iii) $<$ (iv) $<, <$ (v) $<$
(vi) $<, <$.
6. (i) $\left\{\frac{1}{13}, \frac{1}{11}, \frac{1}{8}, \frac{1}{7}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right\}$, $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{11}, \frac{1}{13}\right\}$
(ii) $\left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8}, \frac{11}{12}, \frac{14}{15}\right\}$, $\left\{\frac{14}{15}, \frac{11}{12}, \frac{7}{8}, \frac{5}{6}, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right\}$
(iii) $\left\{\frac{4}{2}, \frac{3}{1}, \frac{6}{1}, \frac{7}{1}, \frac{8}{1}\right\}$, $\left\{\frac{8}{1}, \frac{7}{1}, \frac{6}{1}, \frac{3}{1}, \frac{4}{2}\right\}$.

पृष्ठ 143

(i), (ii), (v), (vi).

पृष्ठ 144

1. (i) ·65 (ii) ·46875 (iii) ·056
(iv) ·076 (v) ·053125 (vi) 1·35625

2. (i) $\frac{81}{250}$ (ii) $\frac{20123}{10000}$ (iii) $\frac{549}{20}$
(iv) $\frac{2123}{1000}$ (v) $\frac{1375}{10000}$ (vi) $\frac{155617}{5000}$.

पृष्ठ 146

1. 1·587, 2·374, 2·476, 3·273, 3·365, 3·373.
2. (i) $<$ (ii) $<$ (iii) $>$ (iv) $>$.

पृष्ठ 160–162

1. (i) $\frac{1}{2}x^2 + \frac{11}{2}x + 15$ (ii) $\frac{1}{2}x^2 + \frac{841}{840}xy + \frac{1}{2}y^2$

(iii) $\cdot005x^2 + \cdot0015xy + \cdot185xz + \cdot0555yz$

(iv) $\frac{1}{3}z^2 + \frac{5}{12}z + \frac{1}{8}$ (v) $\cdot65xy + \frac{1}{3}xz + 3\cdot9y^2 + 2yz$

(vi) $\frac{1}{2}x^3 + \frac{7}{6}x^2 + \frac{5}{13}x + \frac{35}{39}$

(vii) $x + \cdot5y + 3\cdot5z$ (viii) $\cdot3x^2 + \frac{3}{14}y^3 + \frac{1}{7}x^2y + 45xy^2$

(ix) $\frac{2}{3}x^2yz^2 + \frac{5}{4}xy^2z^2 + \frac{7}{x}xyz$

(x) $\frac{2}{9}xy^2z^2 + \frac{14}{5}xy^2z^2 + 4x^2y^2z$.

3. (i) $\frac{xy}{x+y}$ ((i) $\frac{y(2xy^2+3)}{3xy^3+3}$ (iii) $\frac{3x+2y}{2x+5y}$

(iv) $\frac{x(xy+5)}{10}$ (v) $\frac{x(x+1)}{x^2+1}$ (vi) $\frac{18y}{7}$

((vii) $\frac{2x^2+3}{4x+3}$ (viii) $\frac{2y^2+1}{3y}$ (ix) $\frac{y^2+1}{2y}$

(x) $\frac{y^3}{84a^2}$ (xi) $\frac{2(2x+3)}{x(x+2)}$ (xii) $\frac{2xy}{3}$

(xiii) $\frac{91}{88}$ (xiv) x^2y^2 (xv) $\frac{15}{xy}$

(xvi) $\frac{44}{49xy}$.

पृष्ठ 164–165

1. (i) $\frac{2}{7}$ (ii) $\frac{14}{15}$ (iii) $\frac{3}{2}$ (iv) $\frac{133}{85}$

(v) $\frac{4}{9}$ (vi) $\frac{67}{22}$ (vii) $\frac{41}{12}$ (viii) $\frac{1}{2}$

(ix) $\frac{3}{7}$ (x) 5 (xi) $\frac{3}{17}$ (xii) $\frac{4}{5}$

((xiii) $\frac{3}{2}$ ((xiv) $\frac{9}{4}$ (xv) $\frac{2}{5}$

2. (*i*) {1} (*ii*) φ (*iii*) $\left\{\frac{7}{4}\right\}$ (*iv*) φ

(*v*) φ (*vi*) {2} (*vii*) {2} (*vii*) φ

(*ix*) φ (*x*) φ (*xi*) $\left\{\frac{19}{2}\right\}$.

3. (*i*) $\left\{\frac{6}{7}\right\}$ (*ii*) $\left\{\frac{39}{88}\right\}$ (*iii*) $\left\{\frac{1}{2}\right\}$ (*iv*) $\left\{\frac{25}{8}\right\}$

(*v*) {25} (*vi*) {4} (*vii*) φ (*viii*) φ.

4. (*i*) $\left\{x : \frac{2}{3} < x < 2\right.$ (*ii*) $\left\{x : x < \frac{3}{10}\right\}$ (*iii*) $\left\{x : x > \frac{15}{2}\right\}$

(*iv*) $\left\{x : x < 6\right\}$ (*v*) $\left\{x : x > \frac{1}{12}\right\}$ (*vi*) φ

(*vii*) $\left\{x : x \leqslant \frac{3}{2}\right\}$ (*viii*) φ (*ix*) $\left\{x : x < \frac{13}{48}\right\}$

(*x*) $\left\{x : x \geqslant \frac{1}{2}\right\}$ (*xi*) $\left\{x : x \leqslant \frac{3}{2}\right\}$ (*xii*) $\left\{x : x \leqslant \frac{3}{8}\right\}$

(*xiii*) $\left\{x : x \geqslant \frac{1}{2}\right\}$ (*xiv*) φ (*xv*) $\left\{x : x \geqslant \frac{3}{5}\right\}$

पृष्ठ 167–168

(1) 12 (2) 30, 80 (3) $\frac{27}{2}$ (4) 75, 33

(5) $\frac{41}{56}$ (6) 137·50 रु० (7) $7\frac{1}{3}$ (8) $\frac{7}{15}$

(9) 5 सायं (10) 16 दिन (11) $1\frac{13}{47}$ घंटे (12) 24 दिन

(13) $16\frac{2}{3}$ लीटर (14) $5{,}555\ \frac{5}{9}$ रु० और $4{,}444\ \frac{4}{9}$ रु०

(15) X : 250, Y : 300, Z : 240.

सिंहावलोकन प्रश्नावली पृष्ठ 168 – 171

1. (*i*) $\frac{11}{2}$, $\frac{3}{5}$ (*ii*) 5, $\frac{6}{10}$ (*iii*) $\frac{11}{2}$, $\frac{3}{5}$ (*iv*) 3, $\frac{3}{5}$.

2. (*i*) कोई भी विद्यमान नहीं।

(*ii*) न्यूनतम 1, अधिकतम विद्यमान नहीं।

(*iii*) अधिकतम 2, न्यूनतम विद्यमान नहीं।

(*iv*) अधिकतम 2, न्यूनतम 1।

(*v*) न्यूनतम 1, अधिकतम विद्यमान नहीं।

(*vi*) अधिकतम 2, न्यूनतम विद्यमान नहीं।

(*vii*) अधिकतम 2, न्यूनतम 1।

8. (i) $a^2x^2y^2 + abx^2z^2 + aby^4 + b^2y^2z^2$

(ii) $ax^2 + by^2 + cz^2 + (a+b)xy + (a+c)xz + (b+c)yz$

(iii) $\cdot 5ax + ay + 1\cdot 5az + \frac{1}{3}bx + \frac{2}{3}by + bz$

(iv) $1\cdot 7ax + 2\cdot 3ay + \cdot 68xz + \cdot 92yz$

(v) $3xy^3z + 2xyz^2 + \frac{1}{7}x^2y^3z^2$.

9. (i) $\frac{7}{3y}$ (ii) x (iii) $\frac{5}{3}$ (iv) $\frac{3}{a}$

(v) $\frac{z}{xy}$ (vi) $\frac{ab}{z}$ (vii) $\frac{1}{20}$ (viii) $\frac{x}{y}$

(ix) xz (x) $\frac{5ax}{3cz}$.

10. (i) $\left\{\frac{6}{5}\right\}$ (ii) $\left\{\frac{7}{5}\right\}$ (iii) $\{28\}$

(iv) $\left\{\frac{1728}{845}\right\}$ (v) ϕ (vi) $\left\{x : x < \frac{87}{40}\right\}$

(vii) $\{x : x \leqslant 2\}$ (viii) ϕ (ix) $\left\{x : 15 < x \leqslant \frac{35}{2}\right\}$

(x) F.

11. 160, 440 12. 160 13. 6 मिनट

14. $2\frac{2}{11}$ घंटे 15. 2 कि॰मी॰ प्रति घंटा 16. 2800 रु॰, 2000 रु॰

17. 800 रु॰, 1300 रु॰ 18. 9900 रु॰ 19. 63 रु॰

20. 600 रु॰, 400 रु॰ ।

अध्याय 4

पृष्ठ 173

(i) —100 (ii) +100 (iii) —100 (iv) +100

(v) +1400 (vi) —1400 (vii) +1400 (viii) —1400

(ix) —1 (x) +1 (xi) —1 (xii) +1

(xiii) $+\frac{11}{12}$ (xiv) $-\frac{11}{85}$ (xv) $+\frac{13}{8}$ (xvi) $-\frac{13}{8}$

(xvii) —5 (xviii) —5 (xix) $+\frac{25}{12}$ (xx) $+\frac{25}{12}$.

पृष्ठ 179—180

1. (*i*) $+5$ (*ii*) -23 (*iii*) $+\frac{27}{28}$ (*iv*) $-\frac{59}{40}$

(*v*) $-11{\cdot}8$ (*vi*) $+2{\cdot}06$ (*vii*) $+2{\cdot}9$ (*viii*) 0

(*ix*) $-1{\cdot}4$ (*x*) -5 (*xi*) 0 (*xii*) $+\frac{7}{3}$

(*xiii*) $-\frac{8}{9}$ (*xiv*) $+\frac{1}{15}$.

2. (*i*) -6 (*ii*) $-\frac{3}{2}$ (*iii*) $-8{\cdot}85$ (*iv*) $+\frac{1}{6}$.

3. (*i*) -40 (*ii*) $+1{\cdot}8$ (*iii*) $+\frac{11}{12}$.

पृष्ठ 183—184

1. (*i*) -3 (*ii*) $+\frac{7}{3}$ (*iii*) $+2{\cdot}25$ (*iv*) $+2$

(*v*) $+\frac{17}{12}$ (*vi*) $-\frac{7}{3}$.

3. दोनों ही वर्गों में उत्तर शून्य है।

पृष्ठ 186

1. (*i*) $+10$ (*ii*) -21 (*iii*) $+\frac{2}{3}$ (*iv*) $+{\cdot}2$ (*v*) $-\frac{5}{3}$.

2 (*i*) $+9, +5, +15$ (*ii*) $-\frac{217}{120}, -\frac{343}{120}, -\frac{313}{120}$

(*iii*) $-4{\cdot}65, +2{\cdot}15, +{\cdot}05$.

3. (*i*) 8 (*ii*) $\frac{29}{15}$ (*iii*) $\frac{8}{3}$ (*iv*) $\frac{11}{35}$.

पृष्ठ 189—190

1. (*i*) -275 (*ii*) $-\frac{21}{32}$ (*iii*) $-{\cdot}51$ (*iv*) $-6{\cdot}08$

(*v*) -1 (*vi*) $-\frac{3}{14}$

2. (*i*) -120 (*ii*) $-\frac{2}{5}$ (*iii*) 0 (*iv*) $+4{\cdot}2$

(*v*) $+18$.

3. (*i*) -21 (*ii*) $+18$ (*iii*) $+\frac{5}{8}$ (*iv*) $\frac{2}{7}$.

4. (i) $-\frac{1}{6}$ (ii) -40 (iii) $+3$.

5. (i) $+6$ (ii) -2 (iii) -3 (iv) $-\frac{1}{2}$

(v) $-\frac{1}{4}$ (vi) $+\frac{7}{3}$.

पृष्ठ 193

1. (i) $-\frac{1}{3}$ (ii) $-\frac{3}{2}$ (iii) $+\frac{8}{7}$ (iv) $+\frac{25}{58}$

(v) $-\frac{4}{13}$ (vi) $-\frac{20}{7}$ (vii) $-\frac{4}{5}$ (viii) $+\frac{5}{4}$

(ix) $-\frac{20}{141}$ (x) $-\frac{1}{8}$ (xi) $+1$ (xii) -1

(xiii) $-\frac{15}{8}$ (xiv) $-\frac{24}{7}$ (xv) $+\frac{20}{3}$.

पृष्ठ 198

1. (i) $-17, -9, -7, -\frac{11}{13}, 0, +0{\cdot}25, +3, +8$

(ii) $-3, -\frac{7}{12}\ +\frac{1}{4}, +\frac{5}{6}, +\frac{9}{3}$

(iii) $-3, -0{\cdot}25, 0, +\frac{1}{4}, +\frac{3}{4}, +10$

(iv) $-\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{6}, +\frac{1}{2}, +\frac{3}{4}, +\frac{5}{6}$

(v) $-3, -\frac{2}{3}, +\frac{8}{12}, +2\frac{1}{3}$

(vi) $-21, -12, -7, -6, 0, +2, +12, +21$.

2. (ii), (iii).

पृष्ठ 203

(i), (ii), (iii), (vi); (vii).

पृष्ठ 210—211

1, (i) $-21a^4b^2c$ (ii) $\frac{7}{4}x^4y^2z^3$ (iii) $\frac{xy}{x+y}$

(iv) $\frac{xy}{y-x}$ (v) $3xy$ (vi) $\frac{1}{3(b+c)}$

(vii) $\frac{15x^2}{2az^2}$ (viii) $y+2x$ (ix) $\frac{8a-b}{2}$

(x) $\frac{2(x+3)}{3}$ (xi) $\frac{x-y}{x+y}$ (xii) $\frac{a+b}{b(a-b)}$

(xiii) $\frac{a-b}{a+b}$ (xiv) $\frac{y^2+4y-4}{y^2-4}$ (xv) $\frac{6x}{9x^2-16}$

(xvi) $\frac{10}{49y^2-25}$ (xvii) $\frac{2a^2-3b}{6a^2b}$ (xviii) $\frac{-2x(2x+1)}{1-x^2}$

(xix) $\frac{y(2x+5y)}{(x+2y)(x+3y)}$ (xx) $\frac{2x^2+10x+3}{(x+2)(x+3)}$

पृष्ठ 213—215

1. (i) -14 (ii) $\frac{75}{2}$ (iii) $\frac{315}{47}$ (iv) $\frac{-115}{896}$

(v) $\frac{264}{53}$ (vi) $\frac{-7}{120}$ (vii) $\frac{341}{158}$ (viii) $\frac{84}{253}$

(ix) 2 (x) $\frac{-43}{2}$ (xi) $\frac{-1}{6}$ (xii) -3

(xiii) $\frac{-3}{2}$ (xiv) 3 (xv) कोई भी $x \in \mathbf{Q}$ हल है ।

2. (i) $\{x : x > -12\}$ (ii) $\left\{x : x < -\frac{11}{6}\right\}$

(iii) $\left\{x : x < -\frac{840}{143}\right\}$ (iv) $\{x : x > 2\}$

(v) $\left\{x : x \leqslant \frac{200}{3}\right\}$ (vi) $\left\{x : x \leqslant -\frac{73}{120}\right\}$

(vii) $\left\{x : x \geqslant -\frac{5}{4}\right\}$ (viii) $\{x : x \geqslant 37\}$

(ix) $\left\{x : x \geqslant -\frac{1}{2}\right\}$ (x) $\{x : x \geqslant -6\}$.

3. (i) $-\frac{3}{5}$ (ii) 10 (iii) $-\frac{31}{6}$ (iv) -5 (v) -1.

पृष्ठ 217—218

1. (*i*) $\{2, -2\}$ (*ii*) $\left[\frac{5}{7} - \frac{5}{7}\right]$ (*iii*) $\{8, -2\}$ (*iv*) $\{11, 3\}$

(*v*) $\left(\frac{5}{7}, \frac{3}{7}\right)$ (*vi*) $\left(-\frac{51}{8}, -\frac{63}{8}\right)$ (*vii*) $\{-4, -10\}$ (*viii*) $8, \left[\frac{6}{5}\right]$

(*ix*) $\{5\}$ (*x*) ϕ

2. (*i*) $\{4, -4\}$ (*ii*) $\{0\}$ (*iii*) $\{4, 0, -4\}$ (*iv*) ϕ.

3. (*i*) $\{x : -5 < x < 5, x \in \mathbf{Q}\}$ (*ii*) $\{x : -3 < x < \frac{1}{3}, x \in \mathbf{Q}]$

(*iii*) $\left\{x : \frac{9}{7} < x < \frac{25}{7}, x \in \mathbf{Q}\right\}$

(*iv*) $\{x : x > 2, x \in \mathbf{Q}\} \cup \{x : x < -2, x \in \mathbf{Q}\}$

(*v*) $\{x : 4 < x < 10, x \in \mathbf{Q}\}$

(*vi*) $\{x : x > 13, x \in \mathbf{Q}\} \cup \{x : x < 5, x \in \mathbf{Q}\}$

(*vii*) $\left\{x : x > \frac{16}{3}, x \in \mathbf{Q}\right\} \cup \left\{x : x < -\frac{8}{3}, x \in \mathbf{Q}\right\}$

(*viii*) $\left\{x : x > -\frac{32}{35}, x \in \mathbf{Q}\right\} \cup \left\{x : x < \frac{52}{35}, x \in \mathbf{Q}\right\}$

(*ix*) ϕ

(*x*) संख्या $\frac{5}{2}$ को छोड़कर समुच्चय $\mathbf{Q}$

सिंहावलोकन प्रश्नावली : पृष्ठ 218—221

1 (*i*) 2·4—3·75 (*ii*) 2·16,—3·75 (*iii*) 2·4,—3·75

(*iv*) —·7,—3·75.

2. *A* : न्यूनतम — 5, अधिकतम विद्यमान नहीं ।

B : अधिकतम —3, न्यूनतम विद्यमान नहीं ।

C : अधिकतम — 3, न्यूनतम — 5.

D : कोई भी विद्यमान नहीं ।

E : अधिकतम 0, न्यूनतम विद्यमान नहीं ।

F : कोई भी विद्यमान नहीं ।

G : अधिकतम 0, — 1.

H : न्यूनतम — 1, अधिकतम विद्यमान नहीं ।

9. (i) $\frac{1}{2x}$ (ii) 8 (iii) $\frac{9a^2 - 4b^2}{a^2 - b^2}$ (iv) $-\frac{8}{7}$ (v) $-x^2$.

10. (i) $\frac{1}{4}$ (ii) $\frac{297}{130}$ (iii) $\frac{390}{223}$ (iv) कोई हल नहीं

(v) $-\frac{55}{61}$ (iv) $\frac{321}{130}$ (vii) $-\frac{337}{314}$ (viii) $\frac{7}{5}$

(xii) $-\frac{34}{7}$ (x) कोई हल नहीं (xi) $\frac{ad - c}{(a+d)-(b+c)}$

(xii) $\frac{bc - ad}{(a+d)-(b+c)}$

11. (i) $\{x : x < 0\}$ (ii) $\left\{x : x > \frac{91}{51}\right\}$ (iii) $\left\{x : x > -\frac{35}{22}\right\}$

(iv) $\left\{x : x \geqslant -\frac{81}{112}\right\}$ (v) $\left\{\frac{13}{2}, \frac{5}{2}\right\}$ (vi) $\left\{1, -\frac{11}{3}\right\}$

(vii) $\{5, -5, 1, -1\}$ (viii) $\{6, -6, 0\}$ (ix) ϕ

(x) $\{1, -1\}$ (xi) $\left\{x : -\frac{2}{3} < x < \frac{14}{15}\right\}$

(xii) $\left\{x : x > \frac{23}{60}\right\} \cup \left\{x : x < -\frac{7}{60}\right\}$

(xiii) $\left\{x : -\frac{19}{5} < x < \frac{16}{5}\right\}$

(xiv) $\left\{x : x > \frac{1}{56}\right\} \cup \left\{x : x < -\frac{13}{56}\right\}$

(xv) $\{x : x > 3\} \cup \{x : x < 2\}$

(xvi) $\{x : 2 < x < 3\}$ (xvii) $\{2, 3\}$

(xviii) $\{x : x > 1\} \cup \{x : x < 20\}$ (xix) $\{x : 0 < x < 1\}$

(xx) $\{0, 1\}$.

अध्याय 5

पृष्ठ 224—225

1. (i) $3x + (-2) = 0$ (ii) $\frac{2}{3}x + (-4) = 0$

(ii) $ax + (-b) = 0$ (iv) $5x + 2 = 0$

(v) $\frac{5}{4}x + \frac{1}{2} = 0$ (vi) $\cdot 5x + \left(-\frac{5}{12}\right) = 0$

(vii) $ax + (b - c) = 0$ (viii) $(a - c)x + b = 0$

(ix) $(a - c)x + (b - d) = 0$

5. (*i*), (*ii*), (*iv*), (*v*), (*vi*), (*vii*) रैखिक हैं और रैखिक नहीं । प्रभाव क्षेत्र **Q** निम्नलिखित संख्याओं को छोड़कर, समुच्चय है ।

(*i*) 0, 1 (*ii*) *a*, *b* (*iii*) 1, — 3 (*iv*) $-\frac{1}{2}$

(*v*) 7, 4 (*vi*) $-\frac{5}{2}$ (*vii*) —5, 4 (*viii*) 1,—1.

6. (*iii*), (*viii*).

पृष्ठ 226—227

1. (*i*) $\frac{2}{3}$ (*ii*) 6 (*iii*) $\frac{b}{a}$ (*iv*) $-\frac{2}{5}$

(*v*) $-\frac{2}{5}$ (*vi*) $\frac{5}{6}$ (*vii*) $\frac{(c-b)}{a}$ (*viii*) $\frac{b}{(c-a)}$

(*ix*) $\frac{(d-b)}{(a-c)}$.

2. (*i*) 22 (*ii*) $\frac{5}{3}$ (*iii*) 3 (*iv*) $\frac{1}{67}$ (*v*) 0 (*vi*) 11·8

3. (*i*) $\frac{60}{23}$ (*ii*) $-\frac{13}{5}$ (*iii*) 7 (*iv*) $\frac{7}{18}$

4. (*i*) $\frac{4}{7}$ (*ii*) $\frac{(a+b)}{2}$ (*vi*) $\frac{1}{5}$ (*v*) $-\frac{5}{4}$

(*vi*) $\frac{1}{4}$ (*vii*) $-\frac{1}{4}$.

पृष्ठ 227—228

1. (*i*) $a = b$ (*ii*) $a = b$ (*ii*) $l+m = 0$

(*iv*) $l+m = 0$ (*v*) $ab = c$ (*vi*) $ab+c = 0$

(*vii*) $ab+c = 0$ (*viii*) $ab = c$ (*ix*) $lq+mp=0$

(*x*) $lq+mp = 0$ (*xi*) $lq = mp$ (*xii*) $ae+bd=cd$.

2. (*i*), (*ii*) और (*iv*) संगत (*iii*) असंगत ।

3. (*i*), (*v*) संगत (*ii*), (*iii*), (*iv*), (*vi*) असंगत ।

4. (*ii*), (*iii*) संगत (*i*), (*iv*) असंगत ।

पृष्ठ 229

1. (*i*) $2x+3y+(-4) = 0$ (*ii*) $2x+(-3y)+4 = 0$

(*iii*) $2x+(-3)y+(-4) = 0$ (*iv*) $2x+(-3)y+(-3) = 0$

(*v*) $x+4y+(-2) = 0$ (*vi*) $4x+2y+0 = 0$

(*vii*) $\frac{3}{2}x + \left(-\frac{7}{4}\right)y + \left(-\frac{7}{4}\right) = 0$

(*viii*) $\frac{19}{3}x + \frac{55}{12}y + \frac{11}{6} = 0.$

2. (*i*), (*ii*), (*iv*), (*v*), (*vi*) रैखिक (*iii*) रैखिक नहीं ।

(*i*) y नहीं हो सकता 0 (*ii*) x नहीं हो सकता 5 (*iii*) v नहीं हो सकता 0

(*iv*) x नहीं हो सकता $-\frac{5}{2}$, y नहीं हो सकता $\frac{6}{13}$

(*v*) y नहीं हो सकता $\frac{1}{6}$, $-\frac{3}{2}$ (*vi*) y नहीं हो सकता $\frac{9}{28}$, $-\frac{11}{7}$.

पृष्ठ 231

2. वही : (*i*), (*iv*). विभिन्न : शेष सभी ।

पृष्ठ 232

1. (*i*) $\{(x, 0) : x \in \mathbf{Q}\}$ (*ii*) $\left\{\left(x, -\frac{5}{2}\right) : x \in \mathbf{Q}\right\}$

(*iii*) $\left\{\left(x, \frac{11}{7}\right) : x \in \mathbf{Q}\right\}$ (*iv*) $\{(0, y) : y \in \mathbf{Q}\}$

(*v*) $\left\{\left(-\frac{5}{3}, y\right) : y \in \mathbf{Q}\right\}$ (*vi*) $\left\{\left(\frac{5}{8}, y\right) : y \in \mathbf{Q}\right\}$.

2. (*i*) $\{(x, y) : x, y \in \mathbf{Q}, y \neq 0$

(*ii*) $\left\{\left(x, y\right) : x, y \in \mathbf{Q}, y \neq \frac{5}{2}\right\}$

(*iii*) $\left\{\left(x, y\right) : x, y \in \mathbf{Q}, y \neq \frac{11}{7}\right\}$

(*iv*) $\{(x, y) : x, y \in \mathbf{Q}, y \neq 0\}$

(*v*) $\left\{\left(x, y\right) : x, y \in \mathbf{Q}, x \neq \frac{5}{3}\right\}$

(*vi*) $\left\{\left(x, y\right) : x, y \in \mathbf{Q}, x \neq \frac{5}{8}\right\}$.

पृष्ठ 238—240

1. (*i*) $\left(\frac{29}{2}, \frac{21}{2}\right)$ (*ii*) $\left(\frac{5}{3}, \frac{29}{3}\right)$ (*iii*) $(-2, 13)$

(*iv*) $(4, 1)$ (*v*) $(6, 2)$ (*vi*) $(3, 2)$

(*vii*) $\left(\frac{3}{2}, \frac{41}{14}\right)$ (*viii*) $\left(-\frac{11}{3}, \frac{1}{2}\right)$ (*ix*) $\left(1, \frac{4}{11}\right)$

2. (i) $\left\{\left(-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)\right\}$ (ii) $\left\{\left(\frac{4}{3}, \frac{3}{2}\right)\right\}$ (iii) $\left\{\left(\frac{31}{20}, \frac{1}{20}\right)\right\}$

(iv) $\left\{\left(\frac{18}{13}, \frac{53}{13}\right)\right\}$ (v) φ

(vi) $\left\{\left(h, k\right) : k = \frac{2h+k}{3}, h, k \in \mathbf{Q}\right\}$

(vii) $\left\{\left(h, k\right) : k = \frac{2h+4}{7}, h, k \in \mathbf{Q}\right\}$ (viii) $\{(-1, 0\}$

(ix) $\{(0, 1)\}$ (x) φ (xi) $\{(h, k) : k=2h+3, h, k \in \mathbf{Q}\}$

3. (i) $\left\{\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{4}\right)\right\}$ (ii) $\{(1, 1)\}$ (iii) $\left\{\left(\frac{5}{12}, \frac{50}{119}\right)\right\}$

(iv) $\left\{\left(\frac{1}{14}, \frac{1}{6}\right)\right\}$ (v) $\left\{\left(-\frac{5}{4}, -\frac{3}{2}\right)\right\}$ (vi) $\left\{\left[\frac{2}{3}, -\frac{3}{2}\right]\right\}$

(vii) $\left\{\left(\frac{1}{3}, -1\right)\right\}$ (viii) $\left\{\left(2, \frac{1}{2}\right)\right\}$ (ix) φ

(x) $\left\{\left(h, k\right) : k = \frac{7h}{2\,(5h-7)}, h, k \in \mathbf{Q}\right\}$.

4. (i) $\{(60, 40)\}$ (ii) $\{(20, 18)\}$ (iii) $\{(4, 2)\}$

(iv) $\{(18, 54)\}$ (v) $\left\{\left(\frac{687}{62}, \frac{339}{62}\right)\right\}$ (vi) $\{(3, -2)\}$

(vii) $\{(5, -5)\}$ (viii) $\{(3, -2)\}$.

पृष्ठ 244—245

1. (i) $\left(-\frac{c+d}{2a}, \frac{d-c}{2a}\right)$ (ii) $\left(0, -\frac{c}{b}\right)$

(iii) $\left(-\frac{ac+bd}{a^2+b^2}, \frac{ad-bc}{a^2+b^2}\right)$ (iv) $\left(\frac{bd-ac}{a^2+b^2}, \frac{bc+ad}{a^2+b^2}\right)$

(v) $\left(\frac{e-c}{a-d}, \frac{cd-ae}{b\,(a-d)}\right)$ (vi) $\left(\frac{be-cd}{a\,(d-b)}, \frac{e-c}{b-d}\right)$

2. (i) $(1, 3)$ (ii) $\left(-\frac{1}{2}, 2\right)$ (iii) $\left(-\frac{1}{5}, \frac{19}{5}\right)$

(iv) $\left(\frac{1}{13}, \frac{43}{13}\right)$ (v) $\left(\frac{29}{13}, \frac{11}{13}\right)$ (vi) $\left(\frac{16}{7}, \frac{26}{7}\right)$

(vii) $\left(\frac{13}{19}, \frac{62}{19}\right)$ (viii) $\left(-\frac{9}{17}, \frac{2}{17}\right)$.

पृष्ठ 245—246

संगत (i), (iii), (vi) असंगत : (ii).

पृष्ठ 247—248

1. (i), (ii), (iii), (iv), (v), (vii), $(viii)$ रैखिक हैं किन्तु (vi) रैखिक नहीं।

प्रतिबंध

(iii) $z \neq \frac{5}{2}$ (vi) $y \neq \frac{7}{12}$ (v) $x \neq \frac{1}{5}$

(vi) $y \neq 2$, $z \neq 3$ (vii) $y \neq \frac{8}{3}$ $(viii)$ $y \neq 2$.

2. हाँ : (i) नहीं : शेष सभी

3. (i) $\{(x, y, 0) : x, y \in \mathbf{Q}\}$ (ii) $\{(0, y, z) : y, z \in \mathbf{Q}\}$

(iii) $\{(x, 0, z) : x, z \in \mathbf{Q}\}$ (iv) $\left\{\left(\frac{3}{5}, y, z\right) : y, z \in \mathbf{Q}\right\}$

(v) $\{(5, y, z) : y, z \in \mathbf{Q}\} \cup \left\{\left(x, -\frac{3}{2}, z\right)\right\} : y, z \in \mathbf{Q}\}$

(vi) $\{(x, y, -5) : x, y \in \mathbf{Q}\} \cup \{(x, 4, z) : x, z \in \mathbf{Q}\}$.

पृष्ठ 253

1. (i) $\{(-30, -39\ -12)\}$ (ii) $\{(20, 15, 22)\}$

(iii) $\{(-1, 3, -4)\}$ (iv) $\{(6, 8, 10)\}$

(v) $\{(a, b, c) : a = -(11+c), b = -(21+c) / 3, a, b, c \in \mathbf{Q}\}$

(vi) ϕ

(vii) $\left[\left(a, b, c\right) : a = \frac{21c - 146}{13}, b = \frac{8 - 22c}{13}, ab, c \in \mathbf{Q}\right]$

$(viii)$ ϕ

2. (i) $\left[\left(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)\right]$ (ii) $\left[\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{4}\right)\right]$

(iii) $\left\{\left(-\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, -1\right)\right\}$ (iv) $\left[\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{5}\right)\right]$.

पृष्ठ 260—262

(1) 35 (2) 36 (3) 692 (4) पिता 40, पुत्र 10

(5) 36 (6) $13\frac{1}{3}$ दिन (7) 5 : 1 (8) 6 रु०, 5 रु०

(9) 960 रु० 480 रु० (10) 15 रु०, 1·50 रु० (11) 4 कि० मी० प्रति घंटा

(12) 25 कि० मी० प्रति घंटा (13) 5 मिनट, 6 मिनट (14) 11, 10

(15) 9 कि० मी०, 4 कि० मी० (16) 2500 रु० (17) 800 रु०, 750 रु०

(18) 3500 रु० 3250 रु० (19) 21735 रु० (20) 11,000 रु०, 10,000 रु०.

सिंहावलोकन प्रश्नावली पृष्ठ 263—266

1. (*i*) (1, 0) (*ii*) (2, 3) (*iii*) $\left(\frac{73}{57}, \frac{62}{67}\right)$

(*iv*) कोई हल नहीं (*v*) $\left(-\frac{86}{163}, \frac{157}{163}\right)$ (*vi*) (6, 6).

2. हाँ : (*i*), (*iv*), नहीं : (*ii*), (*iii*).

3. (*i*) (1, —1) (*ii*) $\left(\frac{895}{150}, \frac{895}{198}\right)$

4. $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)=0.$

5. (*i*) $\left[\left(a, b, c\right) : a=\frac{c-6}{11}, b=\frac{17c+19}{11}, a, b, c \in \mathbf{Q}\right]$.

(*ii*) ϕ (*iii*) $\left(\frac{3}{2}, -\frac{11}{14}, \frac{73}{19}\right)$ (*iv*) $\left(-\frac{5}{4}, -\frac{10}{13}, \frac{7}{52}\right)$.

6. (*i*) $\left(\frac{1}{3}, 1, \frac{1}{5}\right)$ (*ii*) $\left(1, 1, \frac{4}{3}\right)$

(7) 37 (8) आशा 700 रु०, ऊषा 1700 रु०

(9) $\frac{5}{8}$ (10) 3 दिन, $4\frac{1}{2}$ दिन

(11) यह 12 घंटे में खाली करती है (12) 17500 रु०, 12500 रु०

(13) 144, 96 (14) पिता 33, पुत्र 10

(15) 36, 27 वर्ष (16) $1\frac{1}{2}$, $6\frac{1}{2}$ कि० मी० प्रति घंटा

(17) 60, 80 कि० मी० प्रति घंटा (18) 60 वर्ग से०मी०, 20 वर्ग से० मी

(19) $10166\frac{2}{3}$ रु०, 6000 रु० (20) 4320 रु०, 4050 रु०

अध्याय 6

पृष्ठ 268

एकपद : (*iii*), (*iv*), (*vii*)

द्विपद : (*i*), (*v*), (*viii*)

त्रिपद : (*ii*), (*vi*), (*ix*).

पृष्ठ 269

1. (*i*) 2, 1; एक (*ii*) —2, 5; एक (*iii*) —3, 0; एक

(*iv*) 5, ·7; एक (*v*) —1·5,2; एक (*vi*) 7, 0; एक

(*vii*) —2, 0, 7; दो (*viii*) ·5, —7, 8; दो (*ix*) ·7, 0, 1; दो

(x) 3, —2, 1; दो (xi) 5/2, 1, —3; दो (xii) — 8, 0, 0; दो
(xiii) 1, 1, —1; दो (xiv) —2, 5/3, 0; दो (xv) 3, 0, —7; दो
(xvi) 1, 7, —3, 5; तीन (xvii) 2, 0, 0, —2, 5; चार
(xviii) 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0—1; सात।

2. (xiii), (xvi), (xviii).

पृष्ठ 270—271

1. (i) x^2+3x+2 (ii) x^2+x-6 (iii) $x^2-11x+28$
(iv) $2x^2+5x+2$ (v) $6x^2+13x+6$ (vi) $30x^2+13x-77$
(vii) $3x^2+11x-4$ (viii) $-2x^2+15x-7$ (ix) $3x^2-2x-8$
(x) $-9t^2+3t+2$ (xi) $-16t^2+25$ (xii) $-2t^2-t+10$

2. (i) $x^2+(a+b)x+ab$ (ii) $x^2+(3q-2p)x-6pq$
(iii) $y^2+(l-5m)y-5lm$.

पृष्ठ 272—273

1. (i) 4 (ii) $\frac{9}{2}$ (iii) a^2 (iv) $\frac{1}{4}$ (v) $\frac{25}{4}$
(vi) $\frac{b^2}{4a^2}$ (vii) $\frac{1}{16}$ (viii) $\frac{49}{64}$ (ix) $\frac{81}{484}$

और प्रत्येक वर्ग में तदनुरूप रैखिक बहुपद

(i) $x-2$ (ii) $x+\frac{3}{2}$ (iii) $x-a$ (iv) $x-\frac{1}{2}$
(v) $x-\frac{5}{2}$ (vi) $x+\frac{b}{2a}$ (vii) $x-\frac{1}{4}$ (viii) $x+\frac{7}{8}$
(ix) $x-\frac{9}{22}$ है।

2. (i) 2 (ii) $\frac{19}{4}$ (iii) $\frac{25}{3}$ (iv) $\frac{17}{4}$
(v) $\frac{l^2-4m}{4}$ (vi) $m-l^2$.

3. (i) $6x$; $x+3$ या $-6x$; $x-3$
(ii) $3x$; $x+\frac{3}{2}$ या $-3x$; $x-\frac{3}{2}$

4. (i) 2 or —6 (ii) $\frac{19}{5}$ या $\frac{31}{5}$
(iii) $2m-l$ or $-2m-l$ (iv) $l+m$ या $m-l$.

पृष्ठ 278

(i), (ii), (iv), (vi), (vii), ($viii$), (x), (xii), ($xiii$), (xv)

(i) $(x+2)(x+3)$ (ii) $(x-1)(x-8)$ (iv) $(x+4)(x-2)$
(vi) $(x-5)(x+2)$ (vii) $(2x-5)(x-1)$ ($viii$) $(3x+2)(x+2)$
(x) $(2x-5)(5x+1)$ (xii) $(x+2)(8x-3)$ ($xiii$) $(3x+4)^2$
(xv) $(x+2)(7x+2)$.

पृष्ठ 281

(i) $(x+1)(x+5)$ (ii) $(x-1)(x-2)$ (iii) $(x+5)(x-1)$
(iv) $(x-14)(x+2)$ (v) $(2x+5)(x+1)$ (vi) $(3x-2)(2x-3)$
(vii) $(y-1)(3y-2)$ ($viii$) $(3y-5)(4y+3)$ (ix) $(y-5)(2y+5)$
(x) $(2t-3)(6t-7)$ (xi) $(3t-1)(t-2)$ (xii) $(t-3)(3t+2)$
($xiii$) $(2u+1)(7u-11)$ (xiv) $(3-u)(7+u)$ (xv) $(3u-5)^2$.

पृष्ठ 288

1. (i) $\{3,-3\}$ (ii) $\{2\}$ (iii) $\left(-\frac{7}{2}\right)$ (iv) $\{7,-12\}$
(v) $\{-2,-8\}$ (vi) ϕ (vii) ϕ ($viii$) $\{3, 5\}$
(ix) $\left(1, -\frac{2}{3}\right)$ (x) $\left[\frac{4}{3}, -5\right]$ (xi) ϕ (xii) ϕ

2. (i) कोई हल नहीं (ii) 9 (iii) $-\frac{11}{15}$ (iv) कोई हल नहीं ।

पृष्ठ 290

(i) $\{x : 1 < x < 2\}$ (ii) $\{x : -1 \leqslant x \leqslant 3\}$
(iii) $\{x : -2 < x < 3\}$
(iv) —5,4 के बीच की सभी परिमेय संख्याएँ छोड़कर शेष सभी परिमेय संख्याएँ
(v) 1|2, 2 और इनके बीच की सभी परिमेय संख्याओं को छोड़कर शेष सभी संख्याएँ
(vi) $\left[x : -\frac{5}{4} < x < -\frac{2}{3}\right]$.
(vii) 4 और 5 के बीच की सभी परिमेय संख्याए छोड़कर शेष सभी परिमेय संख्याएँ ।
($viii$) $\{x : -5 < x < 4\}$ (ix) $\{x : -\frac{1}{2} < x < \frac{2}{3}\}$
(x) $\{x : 1 < x < \frac{3}{5}\}$ (xi) $\{x : -2 < x < 4\}$.
(xii) संख्याओं —3, 5 और उनके बीच की सभी परिमेय संख्याओं को छोड़कर शेष सभी परिमेय संख्याएँ ।

पृष्ठ 291—292

(1) 1 or 5 (2) 5, 11 (3) या 2 $-\frac{3}{2}$

(4) आधार : 4 या 6 से० मी० ऊँचाई : 6 या 4 से० मी०

(5) 15 से० मी०, 7 से० मी० (6) 12 मीटर, $7\frac{1}{2}$ मीटर।

सिंहावलोकन प्रश्नावली : पृष्ठ 292—293

1. (*ii*), (*iv*), (*vi*).
   (*ii*) $(x+3)(x+6)$ (*iv*) $(2x+5)(5x-3)$ (*vi*) $(7x+4)(x+2)$

2. (*i*) $\{-2, -10\}$ (*ii*) $\left\{-2, \frac{5}{3}\right\}$ (*iii*) $\{-2, 3\}$
   (*iv*) $\left\{-\frac{5}{6}, \frac{5}{2}\right\}$ (*v*) $\left\{0, \frac{1}{7}\right\}$ (*vi*) ϕ
   (*vii*) $\left\{\frac{1}{2}\right\}$ (*viii*) ϕ (*ix*) $\left\{\frac{5}{2}, -\frac{5}{2}\right\}$

3. (*i*) 1, —4 (*ii*) कोई हल नहीं (*iii*) कोई हल नहीं (*iv*) 3.

4. (*i*) $(x+a-1)(x-a+2)$ (*ii*) $(2x+3a)(2x+3a-4)$
   (*iii*) $(2x+3a)(2x+3a-4)$ (*iv*) $(2x+a-1)(x-4a+4)$.

(5) लंबाई : 16 से०मी०, चौड़ाई : 4 से० मी०, वर्ग की भुजा : 8 से०मी०

(6) आधार 15 या 7 से०मी०, ऊँचाई : 7 या 15 से० मी०

(7) 17, 18, 19 (8) 12, 8 (9) 18 घंटे (10) एक घंटा।

परिशिष्ट

पृष्ठ 298

1. (*i*) 123 (*ii*) 592 (*iii*) 540 (*iv*) 2558
   (*v*) 7272 (*vi*) 2400 (*vii*) 242756 (*viii*) 146522
   (*ix*) 955565.

2. (*i*) $(101101)_2$ (*ii*) $(3025)_6$ (*iii*) $(10111)_3$ (*iv*) $(3112)_4$
   (*v*) $(33440)_5$ (*vi*) $(441316)_7$ (*vii*) $(10534)_8$ (*viii*) $(1005345)_9$
   (*ix*) $(69150)_{11}$ (*x*) $(152319)_{12}$.

3. (*i*) $(10001110)_2$ (*ii*) $(440)_5$ (*iii*) $(33)_6$ (*iv*) $(60)_7$
   (*v*) $(1157)_9$ (*vi*) $(2991)_{12}$ (*vii*) $(125713)_{11}$ (*viii*) $(111001)_3$
   (*ix*) $(103430)_7$ (*x*) $(311)_8$.

पृष्ठ 300

1. (*i*) 11010 (*ii*) 111111 (*iii*) 1111110 (*iv*) 1100100
   (*v*) 11010 (*vi*) 1001.
2. (*i*) 111, 1000, 1010, 1100 (*ii*) 11, 100, 101, 111.
   (*iii*) 1000, 1001, 1010, 1100.
3. (*i*) $>$ (*ii*) $<$ (*iii*) $<$ (*iv*) $>$.

परीक्षण-पत्र I

पृष्ठ 301—302

1. (*a*) $\{2,0,3,7,4,8,9,6,11\}$, $\{0,7,8\}$.
   (*b*) उदाहरणार्थ $-\frac{2}{3}, \cdot05, 13\cdot24, -2\cdot48, \frac{13}{5}$ परिमेय संख्याएँ हैं किन्तु पूर्ण संख्याएँ नहीं $0, -7, -24, -13, -41$ पूर्ण संख्याएँ हैं किन्तु परिमेय संख्याएँ नहीं।
2. $\{1,2,3,4,6,8,12,24\}$, $\{1,2,3,6,7,14,21,42\}$, $\{1,2,3,6\}$, 1,6,6.
4. (*b*) $2^{10}\times 3^3$, $2^7\times 5^2$ $2^{10}\times 3^3\times 5^2$.
5. (*a*) ϕ. परंतु यदि प्रभाव-क्षेत्र के **Q** होने पर सत्य समुच्चय $\left\{-\frac{1}{3}\right\}$ हो जाता है (*b*) $\{1,3,5\}$.
7. (*b*) (*i*) $\left(-\cdot75, 0, \frac{2}{3}, \frac{13}{15}, 1\cdot25\right)$
   (*ii*) $\{-3\cdot24, -2\cdot5, -1\cdot27, \cdot01, \cdot75\}$
8. (*a*) $\left(\frac{7}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ (*b*) $\left[\left(\frac{2}{31}, \frac{71}{31}\right)\right]$.
9. (*a*) $am+bl=0$ (*b*) $(x+2)(8x-3)$.
10. (*a*) $\left(\frac{1}{2}, \frac{20}{3}\right)$ (*b*) 100,80.

परीक्षण-पत्र II

पृष्ठ 302—304

1. (*a*) ϕ, $\{4\}$, $\{4, 5\}$.
   (*b*) उदाहरणार्थ $\frac{3}{5}, \frac{11}{4}, 7\cdot34, 2\cdot75, \cdot36$ भिन्न है किन्तु पूर्ण संख्याएँ नहीं और $0, -3, -24, -5, -10$ पूर्ण संख्याएँ हैं किन्तु भिन्न नहीं।

2. $\{4,8,12,16,\ldots\},\{6,12,18,24\ldots\}$. अनन्त ।
$\{12,24,36,48,\ldots\}$. नहीं 12,12.

5. (*a*) $\{3\}$ प्रभाव-क्षेत्र **N** अथवा **F** होने पर कोई परिवर्तन नहीं । परंतु यदि प्रभाव-क्षेत्र सम धन-संख्याओं का समुच्चय हो जाए तो सत्य-समुच्चय हो जाएगा ।
(*b*) $\{(1,3),(4,1)\}$ सांत नहीं

7. (*b*) (*i*) $\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, 0 - \frac{1}{4}, -\frac{5}{6}\right)$
(*ii*) $\{\cdot 77, \cdot 74, 0, -\cdot 73, -\cdot 79\}$.

8. (*b*) व्यक्त नहीं किया जा सकता ।

9. (*a*) $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)=0$ (*b*) ϕ.

10. (*a*) $\frac{6}{7}$ (*b*) 4,7,9,40 वर्ष ।

परीक्षण-पत्र III

पृष्ठ 304—306

1. (*a*) $\phi, \left(1,2,3,4, \frac{1}{2}\right), 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, 1,2,3,4 \Big), \phi$.
(*b*) उदाहरणार्थ $\cdot 75, 3\cdot 4, 11\cdot 45, \frac{3}{11}, \frac{57}{45}$ भिन्न है किन्तु धन-संख्याएँ नहीं ।
सम्भव नहीं ।

2. $\{1,3,7,9,21,63\},\{1,3,5,9,15,45\},\{1,3,9,27\};\{1,3,9\},9,1,9$.

3. 1 का खण्ड केवल एक ही है ।

5. (*a*) हाँ x,y के भिन्न होने पर $x-y$ तभी सार्थक हैं जब $x>y$

6. (*a*) $\{(1,1,3,),(2,1,2),(3,1,1)\}$. (7) (*b*) (*iii*).

8. (*a*)$x(2x+3y)/y$ (*b*) $\{x: -2 \leqslant x \leqslant 5/4\}$.

10. (*a*) 3 कि०मी० प्रति घंटा (*b*) 5,9.

परीक्षण-पत्र IV

पृष्ठ 336—307

4. (*a*) $C \subset (A \cup B)$ सत्य है ।
(*b*) उदाहरणार्थ $0, -\frac{4}{3}, -2, -\frac{7}{11}, -3\cdot 75$ परिमेय संख्याएँ हैं परंतु भिन्न नहीं । सम्भव नहीं ।

2. $\{5,10,15,20,\ldots\},\{10,20,30,40,\ldots\},\{15,30,45,60,\ldots\}$.
$\{30,60,90\ldots\}$, नहीं । 30.

7. (*a*) नहीं । (*b*) (*i*) उदाहरणार्थ $\frac{2}{3}, \frac{6}{11}, \frac{5}{8}, \frac{4}{7}, \frac{3}{5}$.

(*b*) (*ii*)4,5,6.

8. (*a*) $\frac{38}{3}$

(*b*) नहीं । यदि किसी परिमेय संख्या का वर्ग न हो तो समीकरण का कोई भी मूल नहीं ।

9. (*a*) $\left\{\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)\right\}$.

10. (*a*) $\left(x : \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 3\right)$ (*b*) 165000 रु०, 15000 रु० ।

परीक्षण-पत्र V

पृष्ठ 307—309

1. (*a*) $\left[\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2\right], \left[\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, 3, 4\right]$. $A \subset B$ सत्य है ।

(*b*)उदाहरणार्थ $0, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, -\frac{11}{5}, -\frac{7}{22}, -35 - 22 \cdot 3$, नहीं ।

3. $\{1,3,5,9,15,45\},\{1,3,7,9,21,63\},\{1,2,4,5,10,20\},\{1\}$. सांत ।
1, 1. 1.

4. (*b*) $3 \times 5^3, 2^4 \times 3 \times 5, 5 \times 2 \times 3 \times 13, 3^2 \times 5 \times 13$. 15

6. (*a*) $x < \frac{5}{2}$. (*b*) **N** अनन्त ।

7. (*a*) नहीं । उदाहरणार्थ 0 और 1 के बीच में कोई भी पूर्ण संख्या नहीं ।

(*b*) ϕ.

8. (*a*) $-\frac{1}{4}$ (*b*) $\{x : -10 \leqslant x \leqslant 3\}$.

9. (*b*) $\left[\left(-\frac{13}{22}, \frac{13}{7}\right)\right]$.

10. यह जलाशय को 10 घंटे में खाली करती है । (*b*) 5 घंटे ।

(पारिभाषिक शब्दावली Glossary)

अ

अंक	Digit
अंग (समु०)	Member
अंतर	Difference
अंतर	Distance (of points)
अंतरिक्षयात्री	Astronaut
अंतरिक्षयान (शंकुक)	Space Capsule
अंतर्विष्ट	Contained
अंतिम स्थान (बिंदु)	Terminus
अंश	Numerator
अज्ञात	Unknown
अचर पद	Constant Term
अति समुच्चय	Super Set
अद्वितीय	Unique
अनन्त	Infinite
अनुक्रम	Sequence
अपवर्तन नियम	Cancellation Law
अपवर्त्य	Multiple
अपेक्षित	Required
अभाज्य	Prime
अभिन्न	Identical
अभिन्न अंग	Integral Part
अभ्युक्ति	Remark
अ-रिक्त	Non-empty
अर्थात्	i. e.
अर्थात्	Viz.
अवयव (समु०)	Element
अवरोही	Descending
अ-शून्य	Non-zero
असमता	Inequality
असहभाज्य	Co-prime

आ

आकृति	Figure (Diagram)
आख्यान	Interpretation
आधार	Base
आनत	Inclined
आयत	Rectangle
आरोही	Ascending
आश्रित	Dependent

उ

उदग्र	Vertical
उपपत्ति	Proof
उपप्रमेय	Corollary
उप-समुच्चय	Sub-set

ए

एकक अवयव	Unity (Unit Element)
एकल	Single
एकावयवीय	One elementic

क

कक्षातल	Plane of the orbit
करणी	Radical
कलनविधि	Algorithm
कल्पित (काल्पनिक)	Imaginary
कार्यकारी सूत्र	Working Rule
किन्हीं	Arbitrary
कोष्ठक	Bracket
क्रमगुणित	Factorial
क्रमबद्ध	Systematic

क्रमविनिमेय	Commutative
क्रमविनिमेयता	Commutativity
क्रमागत	Consecutive
क्षैतिज	Horizontal

ख

खंड	Factor
खाली (समु०)	Void
खुला कथन	Open Statement

ग

गणन (सं०)	Counting
गुणधर्म	Property
गुणन	Multiplication
गुणांक	Co-efficient
गुरु (को०)	Square

घ

घन	Cube
घनमूल	Cube-root
घात	Power
घातांक	Index
घोल (रस०)	Solution

च

चर	Variable
चालक कक्ष	Cockpit

छ

छूट देना	Start (n.) (to give)
(को) छोड़कर	Apart from

ढ

ढांचा	Frame work

त

तत्समक	Identity
तर्कसंगत	Justifiable
तापांश	Degree (of temperature)
तेजाब	Acid
त्रिक	Triplet
त्रिविकल्प नियम	Trichotomy Law

द

दशमलव पद्धति	Decimal Scheme
दूरी	Distance
द्वि-आधारी पद्धति	Binary Scheme
द्विमय (संक्रिया)	Binary (operation)

ध

धन पक्ष	Positive Side
धन संख्या	Natural Number
धनु (को०)	Curly
धारणा	Concept, Notion
धारिता	Capacity (of containing)

न

नाम पद्धति	Nomenclature
निकष	Criterian
निकाय (समी०)	System
निगमन	Deduce
निदर्शन करना	Illustrate

निरपेक्ष मान	Absolute Value
निरर्थक	Trival
निरूपण	Representation
निर्दिष्ट करना	Specify
निर्मेय	Problem
निष्प्रभाव (सं०)	Neutral
निहित है (समु०)	Belongs to

प

पंक्ति	Row
पक्ष (समी०)	Side
पग	Step
पद	Term
परख	Trial
परावर्ती	Reflexive
परिकलन	Computation
परिकल्पना	Hypothesis
परिणत करना	Reduce
परिणाम, फल	Result
परिपूर्ण (सं०)	Perfect
परिमाण	Magnitude
परिमाण	Dimension (Size)
परिमाप	Perimeter
परिमेय (सं०)	Rational
परिहरण करना	Avoid
परीक्षण	Check
पादांक	Subscript
पूर्ण घात	Integral Power
पूर्ण संख्या	Integer
पृथक्कृत (गुणां०)	Detatched
प्रकरण	Case
प्रति-उदाहरण	Counter example
प्रतिबंध	Condition
प्रतिलोम	Inverse
प्रतिसममिति	Anti-symmetry
प्रतीक	Symbol
प्रतीक निरूपण	Symbolism
प्रभाव क्षेत्र	Domain
प्रमेय	Theorem
प्रश्नावली	Exercise
प्रस्थान-बिन्दु	Starting Point
प्रारंभिक संख्या सिद्धांत	Elementary Number Theory
प्रेक्षण	Observation

ब

बहुपद	Polynomial
बीजीय	Algebraic

भ

भाग	Section
भागफल	Quotient
भाजक	Divisor
भाज्य (सं०)	Composite
भिन्न	Fraction

म

म० स०	H.C.F.
मिथ्या कथन	False Statement
मूल	Root
मूल नियम	Basic Laws

य

यथाकथित	As stated
यमज अभाज्य	Twin Primes
युग्म	Pair
योग	Addition

योगफल	Sum
योज्य	Addend

र

रसायनज्ञ	Chemist
रिक्त (समु०)	Empty
रूप	Form
रेखा	Line
रैखिक (समी०)	Linear

ल

लंबाई-एकक	Unit of Length
लघु (को०)	Circular

व

वज्र गुणन	Cross-multiplication
वर्ग	Case
वर्ग	Square
वर्गपूर्ति	Completing the Square
वर्गमूल	Square root
वस्तु	Entity
वस्तु	Object
वस्तु-रहित (समु०)	Null
वास्तविक उप-समुच्चय	Proper Sub-set
वास्तविक (सं०)	Real
विकर्ण	Diagonal
वितरण नियम	Distributive Law
विनियोग	Investment
विनिर्देश	Specification
विभाज्य	Divisible
विभाज्यता	Divisibility
विभिन्न	Different
वियोजन	Decomposition
विरोध	Contradiction
विलोपन	Elimination
विलोपन फल	Eliminant
विशेष	Specific
विषम	Odd
वेग	Velocity
व्यंजक	Expression
व्यापक रूप में	In general
व्युत्क्रम	Reciprocal

श

शिक्षण शुल्क	Tution fee
शेष	Remainder

स

संकेत	Clue
संकेतन (संकेत पद्धति)	Notation
संक्रामता	Transitivity
संख्यांक	Numeral
संख्यान-पद्धति	System of Numerations
संगत	Compatible
संगति	Consistency
संघ	Union
संयुक्त (मिश्र) कथन	Compound Statement
संयोजन	Composition
संरचना	Structure
संहत	Compact
सकारात्मक रूप में	Positively
सचिह्न (सं०)	Signed
सत्य कथन	True Statement
सत्य समुच्चय	Truth Set
सत्यापन	Verification
सदिश	Vector

सम	Even	सांत (समु०)	Finite
समता	Equality	सारणी	Table
सममिति	Symmetry	सार्थक	Meaningful
समर्थन करना	Justify (answer)	सावधान	Caution (as heading)
समांतर	Parallel	साहचर्य (नियम)	Associative (Law)
समाधान समुच्चय	Solution Set	सीमाबन्धन	Limitation
समाधान (खुले कथन का)	Solution (of the Statement)	सुक्रमण नियम	Well ordering Law
		सुक्रमित	Well ordered
समान	Analogous	सूचना	Information
समाभाज्य (सं०)	Common Prime	स्तंभ	Column
समीकरण	Equation	स्थानमान पद्धति	Positional Scheme
समुच्चय	Set	स्थानान्तरण	Transfer
समुच्चय निर्माणक संकेतन	Set Builder Notation	स्थिरीकरण	Fixation
		स्पष्ट	Obvious
समूहन प्रतीक	Grouping Symbols	स्वच्छ	Neat
सम्मिश्र (सं०)	Complex		
सरलीकरण	Simplification		
सर्वनिष्ठ	Intersection		ह
सहचारिता	Associativity	हर	Denominator

वाक्यांश PHRASES

इसका उल्लेख और इसकी उपपत्ति	State and prove
एक और केवल एक ही	One and only one
(ए) a प्रास (पढ़ने में)	a
(ए) a विभाजित b से बराबर है c के	a divided by b equals c
और आगे भी ऐसा ही	And so on
किंचित् अधिक है	is just greater than
तब और तभी जब	If and only if
यदि	Taking